

FEM-Starterkit

Professor Dr. rer. nat. Bernd Baumann
Professor Dr. rer. nat. Ulrich Stein

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Fachbereich Maschinenbau und Produktion

10. Dezember 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Feldprobleme	3
2	Methode der gewichteten Residuen	4
2.1	Das Prinzip	4
2.2	Methode der kleinsten Quadrate	7
2.3	Galerkin-Verfahren	8
2.4	FEM zum Ersten	10
2.5	FEM zum Zweiten: Elementweiser Aufbau des Gleichungssystems . .	16
3	Variationsrechnung	25
3.1	Funktionale	25
3.2	Eulersche Gleichung	27
3.3	Ritz Verfahren	29
3.4	... und FEM zum Dritten	30
4	Formfunktionen	33
5	Randbedingungen	40
5.1	Dirichletsche Randbedingungen	40
5.2	Neumannsche Randbedingungen	42
5.3	Cauchysche Randbedingungen	48
6	Schlussbemerkungen	50
	Anhang	51
	Differentialoperatoren	51
	Extremwertbedingung	52
	Berechnung der Matrixelemente	53
	Herleitung der Eulerschen Gleichung	54
	Literatur	55

1 Feldprobleme

In Physik und Technik sind die **Feldprobleme** von grundlegender Bedeutung. Dabei geht es um die Frage, wie bestimmte physikalische Größen in einem vorgegebenen Raumgebiet verteilt sind. Dies sei anhand einiger Beispiele erläutert:

Beispiel 1.1 Von großer technischer Bedeutung ist die Frage, welche Temperaturverteilung $T(\vec{r}, t)$ sich während des Betriebs in einem Motorblock einstellt. Die Antwort liefert die **Wärmeleitungsgleichung**:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\Delta T + \eta$$

$c(\vec{r}, t)$ spezifische Wärmekapazität, $\rho(\vec{r}, t)$ Dichte, $\lambda(\vec{r}, t)$ Wärmeleitfähigkeit, $\eta(\vec{r}, t)$ Wärmequellendichte. Δ ist der Laplace-Operator (vgl. Anhang 6). ● ● ●

Beispiel 1.2 Eine mathematisch ähnliche Gleichung beschreibt Diffusionsvorgänge. Diese entstehen, wenn in einem Fluid¹ Dichte- oder Konzentrationsgefälle vorhanden sind. Platziert man zum Beispiel einen Tintentropfen vorsichtig in Wasser, so verteilen sich die Tintenpartikel im Laufe der Zeit durch Diffusion über das gesamte Gefäß. Die Teilchenzahldichte $n(\vec{r}, t)$ einer Komponente ändert sich gemäß der allgemeinen Diffusionsgleichung (**2. Ficksches Gesetz**):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n.$$

D heißt Diffusionskoeffizient. ● ● ●

Beispiel 1.3 Die Ausbreitung von Schallwellen im Raum wird durch die **Wellengleichung** beschrieben:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p$$

($p(\vec{r}, t)$ Schalldruck, c Schallgeschwindigkeit). Es gibt außer dem Schalldruck eine Vielzahl von physikalischen Größen, die sich wellenartig ausbreiten. Zur mathematischen Beschreibung dient immer eine Wellengleichung. ● ● ●

Beispiel 1.4 Die i. Allg. orts- und zeitabhängige Strömungsgeschwindigkeit in einem Fluid ergibt sich aus den **Navier-Stokeschen Gleichungen**. Diese stellen ein System von drei partiellen Differentialgleichungen (Dgl) für die drei Komponenten des Vektors der Strömungsgeschwindigkeit $\vec{u}(\vec{r}, t)$ dar. Die Navier-Stokeschen Gleichungen sind sehr komplex und wir verzichten deshalb auf weitere Erläuterungen. ● ● ●

¹also in einem Gas oder in einer Flüssigkeit

Beispiel 1.5 Die Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

($\vec{\nabla}$ Nabla-Operator (vgl. Anhang 6), $\rho(\vec{r}, t)$ Raumladungsdichte und $\vec{j}(\vec{r}, t)$ Stromdichte) sind z. B. in der Elektrotechnik von nicht zu überschätzender Bedeutung, da sie angeben, wie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ im Raum verlaufen. Für viele Stoffe unterscheiden sich elektrische Verschiebung $\vec{D}(\vec{r}, t)$ und elektrische Feldstärke sowie magnetische Feldstärke $\vec{H}(\vec{r}, t)$ und Magnetfeld nur durch skalare Materialgrößen: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu \vec{H}$. •••

Die Lösung eines Feldproblems besteht im Lösen einer Differentialgleichung bzw. eines Systems von Differentialgleichungen unter Berücksichtigung von Rand- und ggfs. Anfangsbedingungen. In den meisten praktisch interessierenden Fällen ist eine exakte Lösung des Feldproblems nicht möglich. Dann begnügt man sich mit Näherungslösungen. Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist ein Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen, welches sich für Feldprobleme besonders gut eignet. Um das Prinzip, das der FEM zugrunde liegt, zu verstehen, werden in den folgenden Abschnitten verschiedene Näherungsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen anhand einfacher Beispiele skizziert.

2 Methode der gewichteten Residuen

2.1 Das Prinzip

Gegeben sei eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung in der Form

$$\mathcal{L}y(x) = f(x) \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b,$$

wobei \mathcal{L} den Differentialoperator symbolisiert, der auf $y(x)$ angewendet werden soll. Im vorliegenden Abschnitt beschränken wir uns auf den Fall homogener Randbedingungen:

$$y(a) = y(b) = 0.$$

Beispiel 2.1 Mit dem Differentialoperator $\mathcal{L} := \frac{d^2}{dx^2} + 1$ und der Inhomogenität (Störterm) $f(x) := -x$ ist die Differentialgleichung von der Form

$$y'' + y = -x.$$

Der Definitionsbereich sei $0 \leq x \leq 1$, d. h. $a = 0$ und $b = 1$. Die homogenen Randbedingungen lauten also $y(0) = y(1) = 0$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$y(x) = k_1 \sin x + k_2 \cos x - x.$$

Die Randbedingung $y(0) = 0$ liefert $k_2 = 0$ und aus $y(1) = 0$ ergibt sich $k_1 = \frac{1}{\sin 1}$. Damit lautet die exakte Lösung, welche beide Randbedingungen erfüllt

$$y(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x.$$

• • •

Dieses Beispiel wird im Folgenden immer wieder herangezogen werden und bildet auch im Hinblick auf physikalische Anwendungen eine nützliche Grundlage.

Gesucht wird nun eine Näherungslösung von der Form

$$y(x) \approx y_N(x) := \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j(x), \quad (1)$$

wobei die **Ansatzfunktionen** $\Phi_j(x)$ linear unabhängig sein sollen und die Randbedingungen erfüllen müssen. Ein Beispiel für die Ansatzfunktionen $\Phi_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) in der Näherungslösung y_N sind Polynome der Ordnung $n = N + 1$, mit den zunächst freien Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n . Die beiden Randbedingungen bei a und b , die jede einzelne Ansatzfunktion erfüllen soll, ergeben zwei Abhängigkeits-Gleichungen für die $n + 1$ Koeffizienten.

Beispiel 2.2 Für $N = 1$ erhält man den einfachst möglichen Ansatz mit der Ordnung $n = 2$:

$$\Phi_j(x) = \sum_{i=0}^2 a_i x^i = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

wobei j nur den Wert 1 annehmen kann. Die Berücksichtigung der Randbedingungen führt auf $\Phi_j(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ und $\Phi_j(1) = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1$. Das ergibt die eindeutige Lösung: $\Phi_1(x) = x(1 - x)$. Der letzte freie Parameter a_1 wurde dabei zu 1 normiert. Damit lautet die Näherungslösung $y_1(x) = c_1 \Phi_1(x) = c_1 x(1 - x)$.

Um die exakte Lösung der DGL möglichst gut zu approximieren, kann man also nur den einen Koeffizienten c_1 variieren. Wie dies geschieht, ist Thema der nächsten Abschnitte. • • •

Beispiel 2.3 Für $N = 2$ macht man einen Ansatz der Ordnung $n = 3$:

$$\Phi_j(x) = \sum_{i=0}^3 a_i x^i = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

für $j=1,2$. Die Berücksichtigung der Randbedingungen führt auf $\Phi_j(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ und $\Phi_j(1) = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Es bleiben damit zwei Koeffizienten, die beliebig gewählt werden können. Wählt man z. B. für $j = 1$ die Werte $a_1 = 1, a_2 = 0$, sowie für $j = 2$ die Werte $a_1 = 0, a_2 = 1$, so erhält man die zwei linear unabhängigen Polynome dritter Ordnung $\Phi_1(x) = x(1 - x^2)$ und $\Phi_2(x) = x^2(1 - x)$. Damit lautet die Näherungslösung

$$y_2(x) = c_1x(1 - x^2) + c_2x^2(1 - x).$$

Für $N = 2$ hat man jetzt also zwei Koeffizienten c_1 und c_2 , um die exakte Lösung zu approximieren. ●●●

Setzt man y_N mit einem beliebig gewählten Satz von Koeffizienten c_j in die Differentialgleichung ein, so werden i. Allg. die linke und die rechte Seite der Differentialgleichung für jeden Wert von x voneinander abweichen - andernfalls hätte man die exakte Lösung der Differentialgleichung gefunden. Die Abweichung

$$R(\mathbf{c}, x) = \mathcal{L}y_N(x) - f(x) \quad (2)$$

$$= \sum_{j=1}^N \mathcal{L}\Phi_j(x)c_j - f(x). \quad (3)$$

(das **Residuum**) hängt von den gewählten Koeffizienten $c_1 \dots c_N$ ab, die hier in einem Spaltenvektor \mathbf{c} zusammengefasst wurden.

Die Frage ist nun: Wie kann man die c_j geeignet wählen, um die Abweichung der Näherungslösung von der exakten Lösung möglichst klein werden zu lassen, bzw. wie drückt man die Bedingung ‚möglichst klein‘ geeignet aus? Da man im Allgemeinen die exakte Lösung der DGL nicht kennt, kann man auch die Abweichung nicht explizit berechnen. Man braucht deshalb ein anderes Kriterium, das etwas über die Güte einer Approximation aussagt. Alle in den folgenden Abschnitten beschriebenen Verfahren verwenden sogenannte **Gewichtsfunktionen** $w_k(x)$, mit deren Hilfe man für die N Koeffizienten c_j die folgenden N Bedingungsgleichungen für das Residuum $R(\mathbf{c}, x)$ aufstellt:

$$\int_a^b w_k(x)R(\mathbf{c}, x) dx = 0. \quad (4)$$

Berechnet man hieraus die c_j , so erhält man eine Näherungslösung für die Differentialgleichung.

Drückt man in den Bedingungsgleichungen das Residuum durch die Definitionformel aus, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b w_k(x) \left(\sum_{j=1}^N \mathcal{L}\Phi_j(x)c_j - f(x) \right) dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_a^b w_k(x)\mathcal{L}\Phi_j(x)dx c_j - \int_a^b w_k(x)f(x) dx. \end{aligned}$$

Um die Formeln übersichtlicher zu gestalten führt man eine neue Bezeichnungsweise ein:

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Damit kann man die Bedingungsgleichung in der Form

$$\boxed{\sum_{j=1}^N (w_k, \mathcal{L}\Phi_j)c_j = (w_k, f)} \quad (5)$$

schreiben. Hierbei handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$$

für die Unbekannten c_j . Die Größen $(w_k, \mathcal{L}\Phi_j)$ bilden die Elemente der zugehörigen Koeffizientenmatrix und die Größen (w_k, f) sind die Komponenten des Spaltenvektors \mathbf{b} .

2.2 Methode der kleinsten Quadrate

Eine naheliegende Wahl für die Gewichtsfunktion $w_k(x)$ ergibt sich, wenn man fordert, dass das Residuum $R(\mathbf{c}, x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich möglichst klein wird. Das Integral über das Betragsquadrat² des Residuums soll also minimal werden, d. h. die Ableitung nach jedem Koeffizienten c_j soll null sein. Daraus ergeben sich die N Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial c_k} \int_a^b R^2(\mathbf{c}, x) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Ableiten und Vergleich mit der allgemeinen Formel liefert (vgl. Gleichungen 2 bis 4)

$$w_k(x) = \frac{\partial R}{\partial c_k} = \mathcal{L}\Phi_k(x).$$

Die Bedingungsgleichung 5 lautet dann

$$\boxed{\sum_{j=1}^N (\mathcal{L}\Phi_k, \mathcal{L}\Phi_j)c_j = (\mathcal{L}\Phi_k, f)}. \quad (6)$$

Beispiel 2.4 Näherungslösung für das Randwertproblem aus Beispiel 2.1 für den Ansatz aus Beispiel 2.2:

²Betragsquadrat, damit sich positive und negative Anteile nicht wegheben

In diesem Fall besteht das Gleichungssystem 6 nur aus einer Gleichung, die wir aus Gründen der formalen Übereinstimmung zu anderen Beispielen in eckige Klammern setzen. Sie lautet

$$\begin{bmatrix} 3.3667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.91667 \end{bmatrix}$$

Auflösen liefert $c_1 = 0.27228$ und Einsetzen ergibt die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate optimale Näherungslösung

$$y_1(x) = 0.27228 x(1 - x).$$

• • •

Beispiel 2.5 Näherungslösung für das Randwertproblem aus Beispiel 2.1 für den Ansatz aus Beispiel 2.3:

Die Bedingungsgleichung 6 ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} 10.4762 & 5.4262 \\ 5.4262 & 3.7429 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8667 \\ 0.9500 \end{bmatrix}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die Koeffizienten c_1 und c_2 und damit erhält man als Näherungslösung

$$y_2(x) = 0.18755 x(1 - x^2) - 0.01809 x^2(1 - x).$$

Die Näherungslösungen und die exakte Lösung sind in Abbildung 1 gegenübergestellt. Offenbar stellt y_2 eine recht brauchbare Annäherung an den exakten Verlauf dar. • • •

2.3 Galerkin-Verfahren

Eine weitere Möglichkeit, die im Allgemeinen zu einer besseren Näherungslösung für die DGL führt, besteht darin, die Gewichtsfunktion gemäß

$$w_k(x) = \Phi_k(x)$$

zu wählen. Diese Wahl lässt sich zwar nicht so schön geometrisch deuten, wie es im Fall der Kleinst-Quadrat-Methode des vorigen Abschnitts möglich war. Die Zweckmäßigkeit des Ansatzes lässt sich aber mathematisch begründen. Die Bedingungsgleichung 5 lautet in diesem Fall

$$\boxed{\sum_{j=1}^N (\Phi_k, \mathcal{L}\Phi_j) c_j = (\Phi_k, f)}. \quad (7)$$

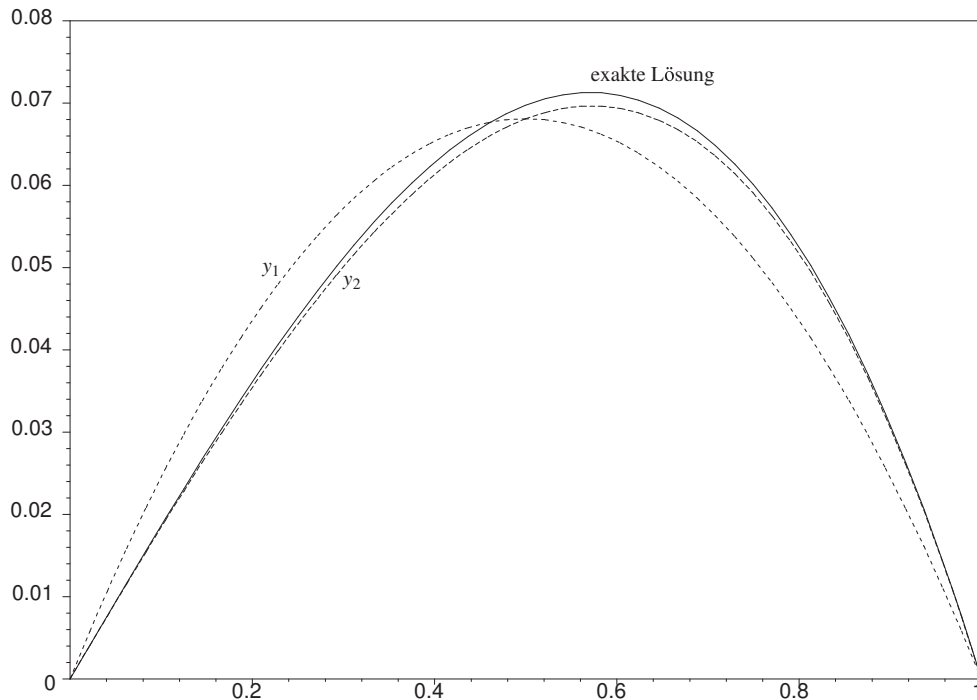


Abbildung 1: Exakte Lösung und die beiden Kleinst-Quadrat-Näherungslösungen y_1 und y_2 im Vergleich.

Beispiel 2.6 Näherungslösung für das Randwertproblem aus Beispiel 2.1 für den Ansatz aus Beispiel 2.2:

Das „Gleichungssystem“ 7 lautet

$$\begin{bmatrix} -0.3000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.08333 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Näherungslösung

$$y_1(x) = 0.27778 x(1 - x).$$

• • •

Beispiel 2.7 Näherungslösung für das Randwertproblem aus Beispiel 2.1 für den Ansatz aus Beispiel 2.3:

Die Bedingungsgleichung 7 lautet jetzt

$$\begin{bmatrix} -0.7238 & -0.2738 \\ -0.2738 & -0.1238 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1333 \\ -0.0500 \end{bmatrix}$$

Näherungslösung:

$$y_2(x) = 0.19211 x(1 - x^2) - 0.0210 x^2(1 - x).$$

Galerkin-Näherungslösungen und exakte Lösung sind in Abbildung 2 gegenübergestellt. y_2 stellt eine nahezu perfekte Näherung des exakten Verlaufs dar. • • •

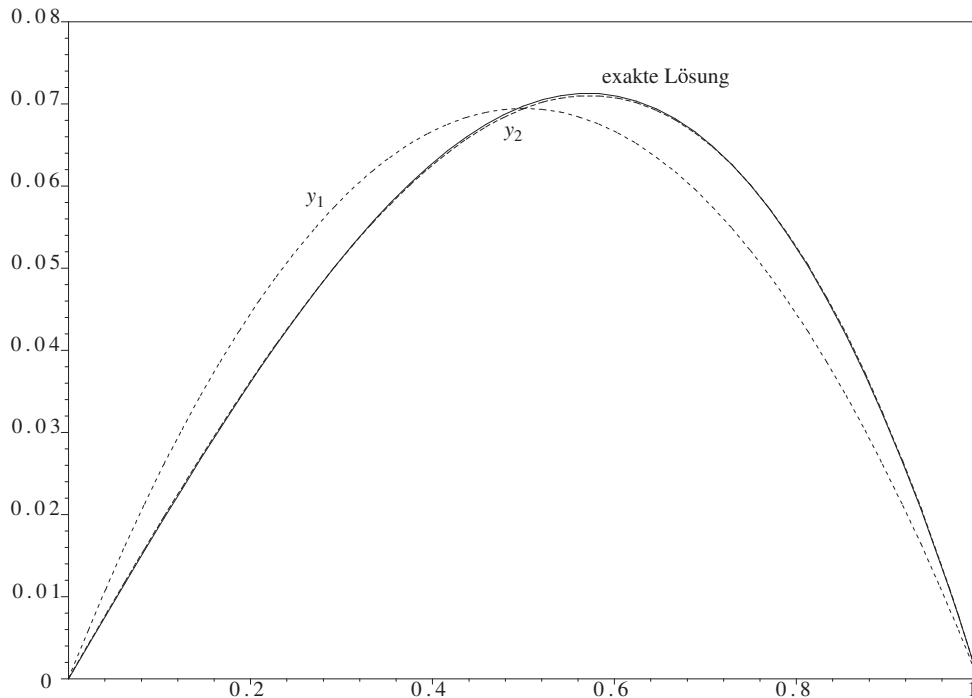


Abbildung 2: Exakte Lösung und die beiden Galerkin-Näherungslösungen y_1 und y_2 im Vergleich. y_2 und die exakte Lösung sind fast deckungsgleich.

2.4 FEM zum Ersten ...

Eine Möglichkeit, die Finite-Elemente-Methode einzuführen, ist die folgende: Die FEM besteht in der Konstruktion einer Näherungslösung für ein Randwertproblem, wobei als Ansatzfunktionen sogenannte **finite Funktionen** gewählt werden. Als finite Funktion bezeichnet man Funktionen, die nur in einem kleinen Teilgebiet des Definitionsbereichs von Null verschieden sind (vgl. Abbildung 3)³. Der Lösungsansatz für das

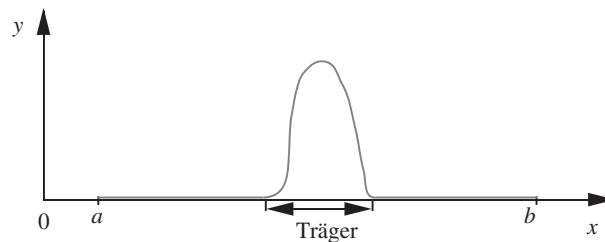


Abbildung 3: Finite Funktion. Das Teilgebiet des Definitionsbereichs, für das die Funktion von Null verschiedene Werte annimmt, bezeichnet man als **Träger**.

Gesamtgebiet ergibt sich als Überlagerung der Ansatzfunktionen der einzelnen Teilge-

³Man spricht von Ansatzfunktionen mit einem lokalen Träger

biete:

$$y_N(x) = \sum_j c_j \Phi_j(x).$$

Die Koeffizienten c_j ergeben sich mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens.

Konkret geht man folgendermaßen vor: Zunächst unterteilt man den Definitionsbereich, also das Intervall $[a, b]$, in N Teilintervalle (**Elemente**) $[x_i, x_{i+1}]$. Die Intervallgrenzen x_i heißen **Knoten**. Offenbar entstehen bei der Unterteilung die $N + 1$ Knoten $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N = b$. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall einer gleichmäßigen Unterteilung. Die Knotenkoordinaten ergeben sich dann aus

$$x_i = x_0 + ih \quad \text{mit} \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, N\}.$$

Hierbei bedeutet h die Elementlänge:

$$h := \frac{b - a}{N}.$$

Wählt man als Ansatzfunktionen finite Funktionen, deren Träger sich auf einige wenige benachbarte Elemente beschränkt, so führt dies beispielsweise beim Galerkin Verfahren auf Matrizen, die nur nahe der Hauptdiagonalen von Null verschiedene Elemente besitzen (Abbildung 4). Gleichungssysteme mit fastdiagonalen Koeffizien-

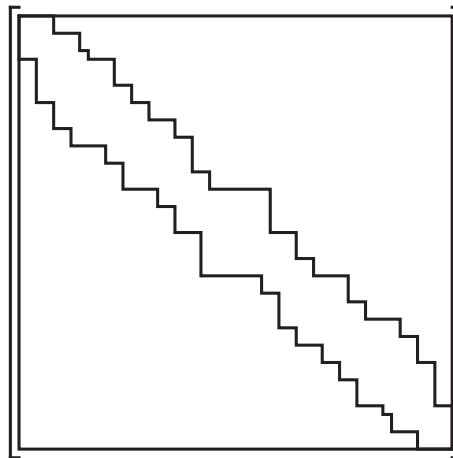


Abbildung 4: Typische Finite-Elemente-Matrix. Sie enthält nur zwischen den zwei gezackten Linien von Null verschiedene Elemente.

tenmatrizen sind besonders einfach zu lösen. Damit ist ein großer Vorteil der Finite-Elemente-Methode schon offenbar geworden.

Die einfachst möglichen finiten Ansatzfunktionen stellen stückweise lineare Funktionen dar (sogenannte **Hütchenfunktionen**, vgl. Abbildung 5). Die formelmäßige Darstellung der Hütchenfunktionen lautet

für $i = 0$:

$$H_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h} & \text{für } x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

für $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$:

$$H_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & \text{für } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & \text{für } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

für $i = N$:

$$H_N(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{N-1}}{h} & \text{für } x_{N-1} \leq x \leq x_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Aus Abbildung 5 ist zu ersehen, dass⁴

$$H_j(x_i) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } j = i \\ 0 & \text{falls } j \neq i \end{cases}.$$

Dies bedeutet, dass die j -te Hütchenfunktion am j -ten Knoten den Wert eins, an allen anderen Knoten den Wert null annimmt. Daraus folgt⁵

$$y(x_i) \approx y_N(x_i) = \sum_{j=0}^N c_j H_j(x_i) = \sum_{j=0}^N c_j \delta_{ij} = c_i. \quad (8)$$

Die Entwicklungskoeffizienten c_i stimmen also an den Knoten mit den Funktionswerten der Näherungslösung überein.

Bei der Berechnung der Matrixelemente ist Vorsicht geboten! Die Steigung der Hütchenfunktion $H_i(x)$ ändert sich bei x_{i-1} , bei x_i und bei x_{i+1} nämlich sprunghaft. An diesen Stellen gibt es Probleme mit der in \mathcal{L} enthaltenen zweiten Ableitung. Dies kann aber mit Hilfe von partieller Integration vermieden werden. Für unser Standardbeispiel mit dem Differentialoperator \mathcal{L} aus Beispiel 2.1 erhält man so für die Berechnung der Galerkin-Matrixelemente:

$$\begin{aligned} (\Phi_k, \mathcal{L}\Phi_j) &= \int_a^b \Phi_k(\Phi_j'' + \Phi_j) dx \\ &= \Phi_k \Phi_j' \Big|_a^b - \int_a^b \Phi_k' \Phi_j' dx + \int_a^b \Phi_k \Phi_j dx. \end{aligned}$$

Damit lautet das Galerkin Gleichungssystem 7

$$\boxed{\sum_{j=0}^N \left((\Phi_k, \Phi_j) - (\Phi_k', \Phi_j') + \Phi_k \Phi_j' \Big|_a^b \right) c_j = (\Phi_k, f)}. \quad (9)$$

Für die von uns gewählten Randbedingungen verschwinden die Φ_k an den Rändern des Intervalls, d. h. $\Phi_k \Phi_j' \Big|_a^b = 0$.

⁴ δ_{ij} heißt Kronecker Symbol

⁵die Summe läuft jetzt von 0 bis N

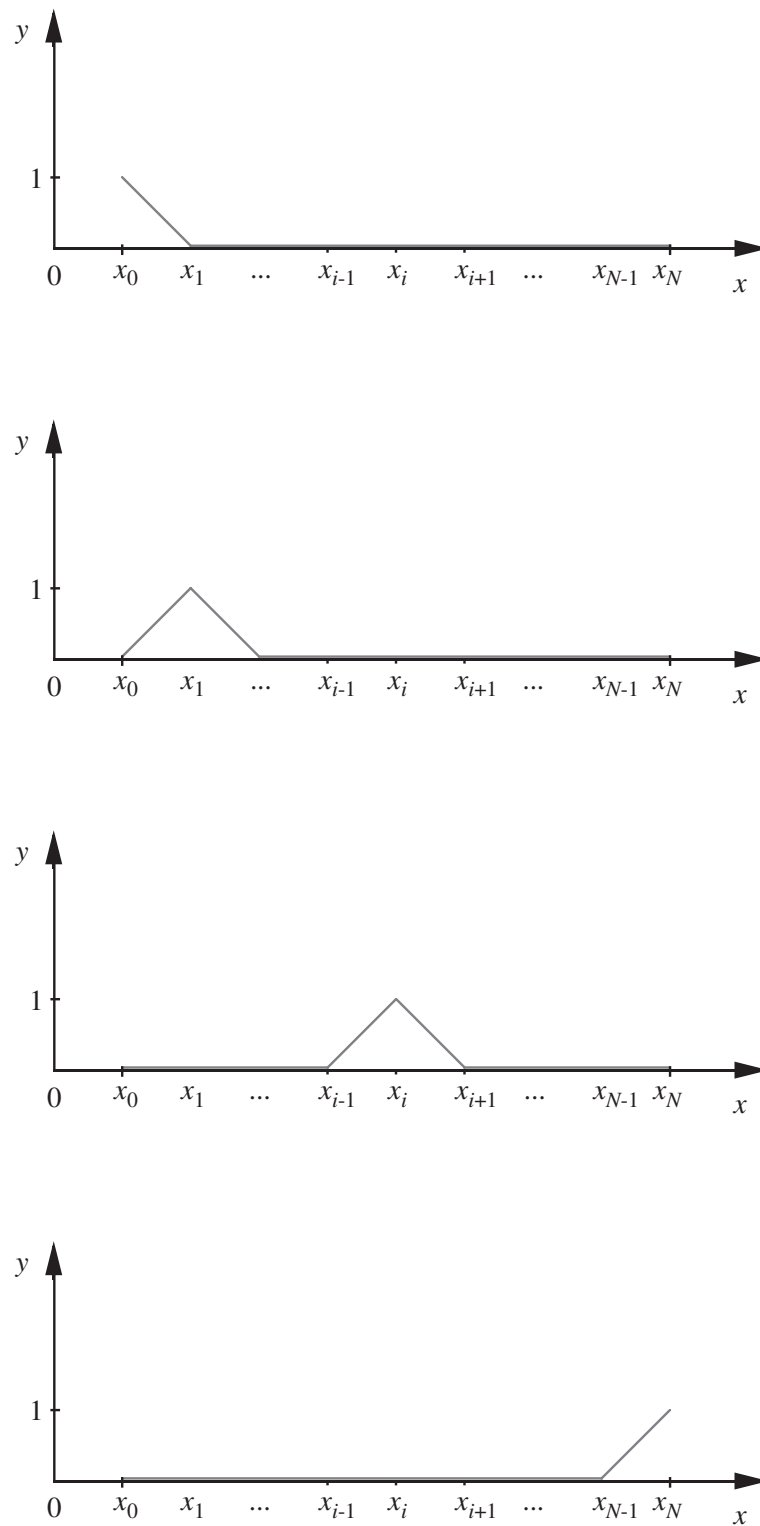


Abbildung 5: Hütchenfunktionen. Von oben nach unten: $H_0(x), H_1(x), H_i(x)$ und $H_N(x)$

Beispiel 2.8 FEM-Näherungslösung für das Randwertproblem aus Beispiel 2.1 für $N = 2$:

Zunächst stellt man fest, dass $a = x_0 = 0$, $b = x_2 = 1$ und $h = 1/2$. Die Näherungslösung lautet $y_2 = \sum_{j=0}^2 c_j H_j(x)$. Aus den beiden Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$ schließt man sofort, dass zwei der Koeffizienten verschwinden: $c_0 = 0$ und $c_2 = 0$. Damit besteht die Näherungslösung nur aus einem Term und es gilt $y_2 = c_1 H_1(x)$.

Die einzig benötigte Hütchenfunktion lautet im vorliegenden Fall

$$H_1(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x) & \text{für } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und ihre Ableitung ist

$$H_1'(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 < x < 1/2 \\ -2 & \text{für } 1/2 < x < 1 \end{cases}.$$

Hiermit erhält man für die Matrixelemente

$$(\Phi_1, \Phi_1) = (H_1, H_1) = \int_0^{1/2} (2x)^2 dx + \int_{1/2}^1 (2(1-x))^2 dx = 1/3$$

und

$$(\Phi_1', \Phi_1') = (H_1', H_1') = \int_0^{1/2} 2^2 dx + \int_{1/2}^1 (-2)^2 dx = 4.$$

Für die rechte Seite des Gleichungssystems ergibt sich

$$(\Phi_1, f) = (H_1, -x) = - \int_0^{1/2} 2x \cdot x dx - \int_{1/2}^1 2(1-x)x dx = -1/4.$$

Damit erhält man

$$(\Phi_1, \mathcal{L}\Phi_1) = -3.6667.$$

Insgesamt ergibt dies

$$\begin{bmatrix} -3.6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2500 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt $c_1 = 0.0682$ und als FEM-Näherungslösung erhält man

$$y_2(x) = \begin{cases} 0.1364 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0.1364 (1-x) & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

• • •

Beispiel 2.9 FEM-Näherungslösung für das Randwertproblem aus Beispiel 2.1 für $N = 3$:

Jetzt hat man $a = x_0 = 0$, $b = x_3 = 1$, $h = 1/3$ und $y_3 = \sum_{j=0}^3 c_j H_j(x)$. Die Randbedingungen implizieren $c_0 = 0$ und $c_3 = 0$. Die Näherungslösung besteht also aus zwei Termen $y_3 = c_1 H_1(x) + c_2 H_2(x)$. Die Hütchenfunktionen lauten

$$H_1(x) = \begin{cases} 3x & \text{für } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 2 - 3x & \text{für } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 0 & \text{für } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und

$$H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 3x - 1 & \text{für } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 3 - 3x & \text{für } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Die zugehörigen Ableitungen sind

$$H_1'(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } 0 < x < 1/3 \\ -3 & \text{für } 1/3 < x < 2/3 \\ 0 & \text{für } 2/3 < x < 1 \end{cases}$$

und

$$H_2'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < 1/3 \\ 3 & \text{für } 1/3 < x < 2/3 \\ -3 & \text{für } 2/3 < x \leq 1 \end{cases} .$$

Daraus ergeben sich die Matrixelemente

$$(\Phi_1, \Phi_1) = \int_0^{1/3} (3x)^2 dx + \int_{1/3}^{2/3} (2 - 3x)^2 dx = 2/9$$

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int_{1/3}^{2/3} (2 - 3x)(3x - 1) dx = 1/18$$

$$(\Phi_2, \Phi_1) = (\Phi_1, \Phi_2) = 1/18$$

$$(\Phi_2, \Phi_2) = \int_{1/3}^{2/3} (3x - 1)^2 dx + \int_{2/3}^1 (3 - 3x)^2 dx = 2/9$$

$$(\Phi_1', \Phi_1') = \int_0^{1/3} 3^2 dx + \int_{1/3}^{2/3} (-3)^2 dx = 6$$

$$(\Phi_1', \Phi_2') = \int_{1/3}^{2/3} -3 \cdot 3 dx = -3$$

$$(\Phi'_2, \Phi'_1) = (\Phi'_1, \Phi'_2) = -3$$

$$(\Phi'_2, \Phi'_2) = \int_{1/3}^{2/3} 3^2 dx + \int_{2/3}^1 (-3)^2 dx = 6.$$

Rechte Seite:

$$(\Phi_1, f) = - \int_0^{1/3} 3x \cdot x dx - \int_{1/3}^{2/3} (2 - 3x)x dx = -1/9$$

$$(\Phi_2, f) = - \int_{1/3}^{2/3} (3x - 1)x dx - \int_{2/3}^1 (3 - 3x)x dx = -2/9.$$

Man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -5.7778 & 3.0556 \\ 3.0556 & -5.7778 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1111 \\ -0.2222 \end{bmatrix}.$$

Hieraus werden die beiden Koeffizienten bestimmt ($c_1 = 0.0549$ und $c_2 = 0.0675$) und man erhält die Näherungslösung (vgl. Abbildung 6)

$$y_2(x) = \begin{cases} 0.1648 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 0.03771 x + 0.04236 & \text{für } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -0.20253 (1 - x) & \text{für } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

• • •

Die FEM Näherungslösungen geben den Funktionsverlauf zwar grob wieder - man hat aber nicht den Eindruck, dass gegenüber den weiter oben betrachteten Näherungsverfahren ein Fortschritt erzielt worden ist. Dennoch zeigt sich, dass die Finite-Element-Methode gegenüber diesen Verfahren erhebliche Vorteile aufweist. Dazu später mehr.

2.5 FEM zum Zweiten: Elementweiser Aufbau des Gleichungssystems

Zur Lösung des Galerkin-Gleichungssystems 7 bzw. 9 muss man die Integrale (Φ_j, f) , (Φ_j, Φ_k) und (Φ'_j, Φ'_k) berechnen. Die Komponenten des Spaltenvektors $(\Phi_j, f) = (H_j, f)$ und der Matrixelemente $(\Phi_j, \Phi_k) = (H_j, H_k)$, sowie $(\Phi'_j, \Phi'_k) = (H'_j, H'_k)$ des finite Element Gleichungssystems 9 setzen sich additiv aus den Beiträgen der einzelnen Elemente zusammen:

$$\begin{aligned} (H_j, f) &= \int_a^b H_j(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_j(x) f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^N (H_j, f)_i, \end{aligned}$$

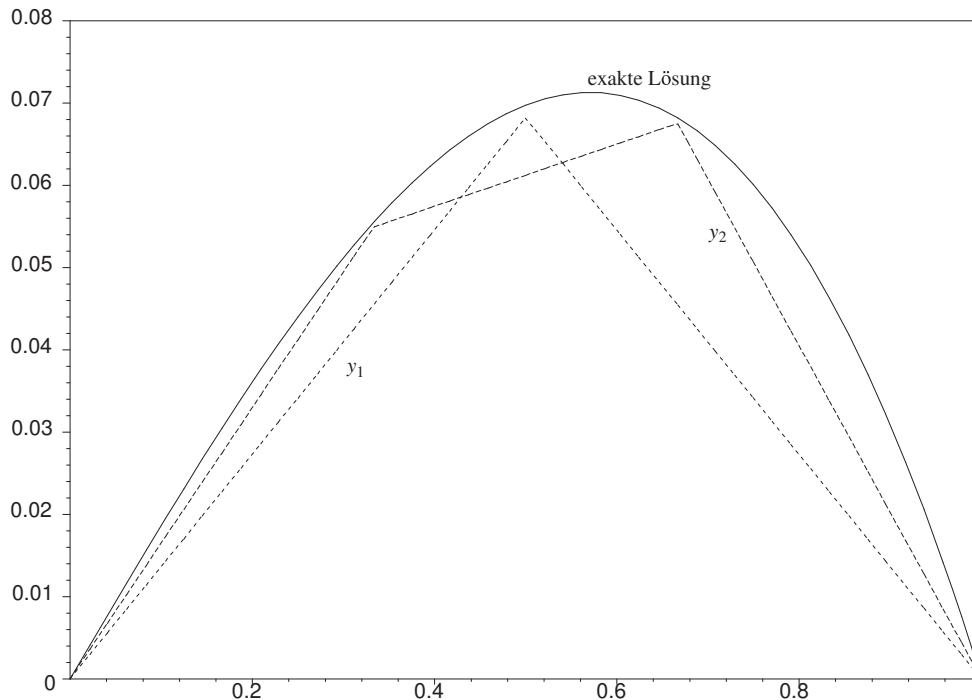


Abbildung 6: Exakte Lösung und FEM-Lösungen

$$\begin{aligned}
 (H_j, H_k) &= \int_a^b H_j(x)H_k(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_j(x)H_k(x) dx \\
 &= \sum_{i=1}^N (H_j, H_k)_i.
 \end{aligned}$$

$((H'_j, H'_k)$ analog, $j, k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, die Elementnummer i läuft von 1 bis N).

Zunächst berechnen wir die Komponenten des Spaltenvektors (H_j, f) für das i -te Element (vgl. Abbildung 7 und Tabelle 1):

$j < i - 1:$	$(H_j, f)_i$	$=$	0
$j = i - 1:$	$(H_{i-1}, f)_i$	$=$	∇_i
$j = i:$	$(H_i, f)_i$	$=$	\triangleleft_i
$j > i:$	$(H_j, f)_i$	$=$	0

Tabelle 1: Komponenten des Spaltenvektors. Für die nichtverschwindenden Komponenten wird zur späteren Verwendung ein graphisches Symbol eingeführt. Das Symbol soll das i -te Element mit Hütchenfunktion H_{i-1} bzw. H_i und der Funktion f darstellen.

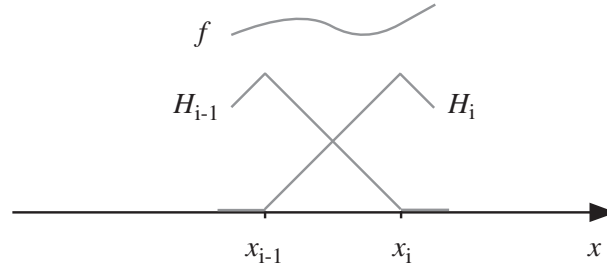


Abbildung 7: Verlauf der Hütchenfunktionen $H_{i-1}(x)$, $H_i(x)$ und der Funktion $f(x)$ im i -ten Element

$$\begin{aligned} (H_{i-1}, f)_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_{i-1} f \, dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x_i - x}{h} x \, dx \\ &= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x_{i-1} + h - x}{h} x \, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1} - h}{h} x \, dx \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Integrals führt man eine Variablensubstitution durch. Für das i -te Element lautet sie

$$\boxed{x = g(\xi) = h\xi + x_{i-1} \quad \Rightarrow \quad \xi = g^{-1}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h}.} \quad (10)$$

Damit

$$\begin{aligned} (H_{i-1}, f)_i &= h \int_0^1 (\xi - 1)(h\xi + x_{i-1}) \, d\xi \\ &= -\frac{h^2}{6} - \frac{h}{2}x_{i-1}. \end{aligned}$$

Genauso berechnet man die zweite von Null verschiedene Komponente:

$$\begin{aligned} (H_i, f)_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_i f \, dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{h} x \, dx \\ &= -\frac{h^2}{3} - \frac{h}{2}x_{i-1}. \end{aligned}$$

Analog verfährt man bei der Berechnung der Matrixelemente (vgl. Abbildung 7, Tabelle 2 und Anhang 6):

$$(H_{i-1}, H_{i-1})_i = \frac{h}{3} \quad \text{und} \quad (H_{i-1}, H_i)_i = \frac{h}{6}.$$

$j < i - 1, \quad k \text{ beliebig:}$	$(H_j, H_k)_i = 0$
$j = i - 1, \quad k < i - 1:$	$(H_{i-1}, H_k)_i = 0$
$k = i - 1:$	$(H_{i-1}, H_{i-1})_i = \begin{array}{c} \diagdown \\ i \end{array}$
$k = i:$	$(H_{i-1}, H_i)_i = \begin{array}{c} \diagup \\ i \end{array}$
$k > i:$	$(H_{i-1}, H_k)_i = 0$
$j = i, \quad k < i - 1:$	$(H_i, H_k)_i = 0$
$k = i - 1:$	$(H_i, H_{i-1})_i = \begin{array}{c} \diagup \\ i \end{array}$
$k = i:$	$(H_i, H_i)_i = \begin{array}{c} \diagdown \\ i \end{array}$
$k > i:$	$(H_i, H_k)_i = 0$
$j > i, \quad k \text{ beliebig:}$	$(H_j, H_k)_i = 0$

Tabelle 2: Die Matrixelemente $(H_j H_k)_i$. Für die nichtverschwindenden Matrixelemente wird wieder ein graphisches Symbol eingeführt, das das i -te Element mit den jeweils beteiligten Hütchenfunktion darstellt.

Es handelt sich offenbar um eine symmetrische Matrix und daher können wir ohne Rechnung schließen, dass

$$(H_i, H_{i-1})_i = \frac{h}{6}$$

gilt. Das noch verbleibende Matrixelement berechnet sich zu

$$(H_i, H_i)_i = \frac{h}{3}$$

(vgl. Anhang 6).

Nach dem gleichen Schema werden die Matrixelemente $(H'_j, H'_k)_i$ berechnet:

$$(H'_{i-1}, H'_{i-1})_i = \frac{1}{h} \quad \text{und} \quad (H'_{i-1}, H'_i)_i = -\frac{1}{h}$$

sowie

$$(H'_i, H'_{i-1})_i = \frac{1}{h} \quad \text{und} \quad (H'_i, H'_i)_i = \frac{1}{h}.$$

Nun müssen die Elementbeiträge zu Systemmatrizen (das sind die Matrizen des Gesamtsystems) zusammengesetzt werden. Diesen Prozess nennt man **Assemblierung**.

Für den Spaltenvektor, bestehend aus den Komponenten (H_j, f) , kann der Assemblierungsprozess symbolisch wie folgt dargestellt werden (die Symbole sind wie in Tabelle 1 aufzufassen):

$$\begin{bmatrix}
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \dots \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \dots \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \dots \\
 \vdots \\
 \dots \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad N \end{array} \\
 \dots \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad N \end{array}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \begin{array}{c} \diagdown \\ 1 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \diagdown \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ 2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \diagdown \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ 3 \end{array} \\
 \vdots \\
 \begin{array}{c} \diagdown \\ N \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ N \end{array} \\
 \begin{array}{c} \diagdown \\ N \end{array}
 \end{bmatrix}$$

Diejenigen Elemente, auf denen die jeweilige Hütchenfunktion null ist, tragen zu den Komponenten des Spaltenvektors nichts bei, und daher findet man in jeder Zeile des rechts dargestellten Vektors nur maximal zwei Einträge.

Für die Matrixelemente (H_j, H_k) ergibt sich folgendes Bild (vgl. Tabelle 2):

$$\begin{bmatrix}
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \dots \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \dots \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad \dots \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \begin{array}{c} \diagdown \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \quad 0 \quad \dots \\
 \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \\ 1 \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \quad \dots \\
 0 \quad \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ 3 \end{array} \quad \dots \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots
 \end{bmatrix}$$

Nichtverschwindende Beiträge ergeben sich auf denjenigen Elementen, auf denen beide Hütchenfunktionen von null verschieden sind. Daher tragen auch zu den Matrixelementen maximal zwei Terme bei. Für die Matrixelemente (H'_j, H'_k) ergibt sich die gleiche Struktur.

Für die konkrete Durchführung der Assemblierung hat es sich als zweckmäßig erwiesen, die die zu einem Element beitragenden Ausdrücke in Vektoren und Matrizen

zusammenzufassen:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i &= \begin{bmatrix} (H_{i-1}, f)_i \\ (H_i, f)_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{h^2}{6} - \frac{h}{2}x_{i-1} \\ -\frac{h^2}{2} - \frac{h}{2}x_{i-1} \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{s}_i - \mathbf{t}_i \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{s}_i = \frac{h^2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_i = \frac{h}{2}x_{i-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die 2×2 -Matrizen

$$\mathbf{M}_i := \begin{bmatrix} (H_{i-1}, H_{i-1})_i & (H_{i-1}, H_i)_i \\ (H_i, H_{i-1})_i & (H_i, H_i)_i \end{bmatrix} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

und

$$\mathbf{K}_i := \begin{bmatrix} (H'_{i-1}, H'_{i-1})_i & (H'_{i-1}, H'_i)_i \\ (H'_i, H'_{i-1})_i & (H'_i, H'_i)_i \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

werden wegen ihres Auftretens in bestimmten physikalischen Zusammenhängen **Elementmassenmatrix** und **Elementsteifigkeitsmatrix** genannt.

Die Zeilen/Spalten-Numerierung dieser Matrizen und Vektoren bezieht sich auf die beiden zum jeweiligen Element gehörigen Knoten (**Elementnumerierung, lokale Numerierung**). Geht man im Rahmen der Assemblierung zu einer über das Gesamtsystem fortlaufenden Numerierung der Knoten über (**globale Numerierung**), so müssen die Elementknotennummern den globalen Knotennummern ein-eindeutig zugeordnet werden. Diese Zuordnung ist Abbildung 8 und Tabelle 3 zu entnehmen.

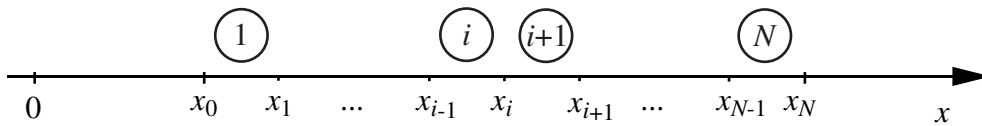


Abbildung 8: Knotenkoordinaten und Elementnummern (im Kreis)

Jede Elementmatrix \mathbf{A}_i muss nun in eine Systemmatrix überführt werden. Dazu ändert man die Indizes an den Matrixelementen gemäß Tabelle 3 und erweitert die Matrizen zu $(N + 1) \times (N + 1)$ -Matrizen.

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} & \\ & & a_{i,i-1} & a_{i,i} & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

	0	1
1	0	1
2	1	2
\vdots	\vdots	\vdots
i	$i - 1$	i
\vdots	\vdots	\vdots
N	$N - 1$	N

Tabelle 3: Zuordnung Elementnummer (linke Spalte) / lokale Knotennummer (erste Zeile) \leftrightarrow globale Knotennummer

Sind alle Matrizen in diese Form gebracht, so erhält man die zugehörige Systemmatrix, indem man diese Matrizen über alle Elemente aufsummiert:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i.$$

Mit den Elementspaltenvektoren verfährt man analog. Eine Ausnahme stellt der Spaltenvektor der Knotenvariablen dar. Dieser ergibt sich einfach zu

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}.$$

Man beachte, dass die Zeilen- und Spaltenindizes aller Matrizen und Vektoren von 0 bis N laufen.

Beispiel 2.10 Bestimmung der Systemmatrizen und Systemvektoren für das Beispiel 2.1 für $N = 2$.

$$\mathbf{M}_1 = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

und folglich

$$\mathbf{M} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Analog erhält man

$$\mathbf{K} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für die beiden Spaltenvektoren \mathbf{t}_i und \mathbf{s}_i ergibt sich

$$\mathbf{t}_1 = \frac{h}{2}x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{h}{2}x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da $x_0 = 0$ und

$$\mathbf{t}_2 = \frac{h}{2}x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{h}{2}x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

also

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_2 = \frac{h^2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da $x_1 = h$. Der zweite Vektor ist gleichfalls schnell bestimmt:

$$\mathbf{s}_1 = \frac{h^2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{h^2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{s}_2 = \frac{h^2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{h^2}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

also

$$\mathbf{s} = \frac{h^2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Der Vektor der Knotenverschiebungen besitzt natürlich ebenfalls drei Komponenten:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

• • •

Schon anhand dieses einfachen Beispiels lässt sich das allgemeine Schema ableiten. Für ein beliebiges N lautet die $(N + 1) \times (N + 1)$ dimensionale **Massenmatrix**

$$\mathbf{M} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

und die **Steifigkeitsmatrix**

$$\mathbf{K} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

(auf den unbesetzten Stellen sitzen Nullen).

Für die beiden $(N + 1) \times 1$ -Systemvektoren erhält man

$$\mathbf{s} = \frac{h^2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{t} = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_0 + x_1 \\ x_1 + x_2 \\ \vdots \\ x_{N-2} + x_{N-1} \\ x_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Mit den zuvor definierten Größen lautet das Gleichungssystem 9

$$\boxed{(\mathbf{M} - \mathbf{K}) \mathbf{c} = -\mathbf{s} - \mathbf{t}.} \quad (14)$$

Dabei wurde der von den Randbedingungen herrührende Term zunächst weggelassen. Die Berücksichtigung von Randbedingungen wird in Abschnitt 5 ausführlich diskutiert. Vorläufig werden wir uns mit der Behandlung von Randbedingungen begnügen, die durch Weglassen von Zeilen und Spalten berücksichtigt werden können.

Es ist nützlich sich einzuprägen, dass, ausgehend von der Differentialgleichung $y'' + y = -x$, der Term y'' auf die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , der Term y auf die Massenmatrix \mathbf{M} und der Störterm $f(x) = -x$ auf den Spaltenvektor $-\mathbf{s} - \mathbf{t}$ führt.

Beispiel 2.11 FEM-Näherungslösung für das Randwertproblem aus Beispiel 2.1 für $N = 3$:

Da $a = x_0 = 0$ und $h = 1/3$ lautet das Gleichungssystem

$$\left(\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{54} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Durch die Umformungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{18} \left(\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} - 54 \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} &= -\frac{1}{54} \left(\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right) \\ \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} - 54 \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} &= -\frac{1}{3} \left(\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

wird man auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -52 & 55 & 0 & 0 \\ 55 & -104 & 55 & 0 \\ 0 & 55 & -104 & 55 \\ 0 & 0 & 55 & -52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2 \\ 4 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

geführt. Die Randbedingungen werden wieder durch Weglassen der ersten und letzten Spalten und Zeilen berücksichtigt. Die Lösung des verbleibenden Gleichungssystems ist identisch zur Lösung aus Beispiel 2.9 und das muss natürlich auch so sein. ●●●

3 Variationsrechnung

3.1 Funktionale

Ein anderer Zugang zur Finite-Element-Methode verwendet als Ausgangspunkt nicht die Differentialgleichung, sondern Funktionale.

Gegeben sei eine Funktion F dreier Variablen x_1 , x_2 und x_3 :

$$z = F(x_1, x_2, x_3).$$

Gegeben sei weiterhin eine Funktion f auf dem Intervall $a \leq x \leq b$, die nur von der Variablen x_1 abhängt:

$$y = f(x_1).$$

Aus diesen beiden Funktionen berechnet man die Zahl I nach folgender Vorschrift⁶:

$$I := \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (15)$$

Ein Ausdruck von dieser Form bezeichnet man als **Funktional**.

Beispiel 3.1 Gegeben sei die Funktion

$$z = F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2 - \frac{1}{2}x_3^2.$$

Daraus ergibt sich

$$F(x, y, y') = \frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{1}{2}y'^2.$$

Wenn man für x_2 die Funktion $y = f(x)$ und für x_3 deren Ableitung einsetzt, wird aus F eine Funktion, die nur noch von einer Variablen, nämlich von $x \equiv x_1$, abhängt. Um I berechnen zu können, muss auch die Funktion f festgelegt werden. Wir wählen

$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Damit

$$F(x, y, y') = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - 2x^2$$

und schließlich

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4 + x^3 - 2x^2\right) dx = -0.31667.$$

• • •

Der Wert von I hängt davon ab, welche Funktion f gewählt wird. Insofern kann man sagen, dass I eine Funktion einer Funktion (nämlich eine Funktion von f) ist. Zur Verdeutlichung noch ein geometrisches Beispiel:

Beispiel 3.2 Wir betrachten Funktionen $y = f(x)$ mit $(a, f(a)) = (0, 0)$ und $(b, f(b)) = (1, 1)$ (vgl. Abbildung 9). Jede solche Funktion definiert einen Weg in der $x-y$ -Ebene. Das Funktional

⁶Wenn im folgenden von den drei Variablen x_1 , x_2 und x_3 nur die erste gebraucht wird, unterdrücken wir den Index 1.

$$I := \int_0^1 \sqrt{1 + y'} dx$$

liefert die Länge des durch die Funktion f beschriebenen Weges. ● ● ●

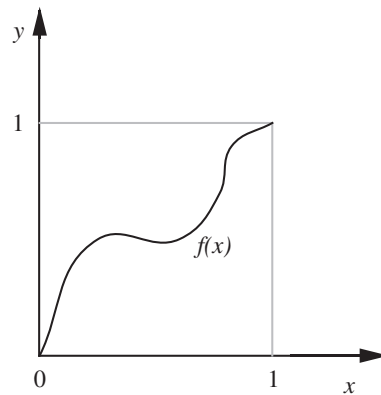


Abbildung 9: Eine Funktion $y = f(x)$ beschreibt einen Weg in der $x - y$ -Ebene

3.2 Eulersche Gleichung

Ein wichtiger Problemkreis betrifft das Auffinden derjenigen Funktion f , für die ein gegebenes Funktional einen Extremwert darstellt (**Variationsaufgabe**). Die Funktion f soll dabei bei $x = a$ und $x = b$ vorgegebene Randbedingungen erfüllen.

Beispiel 3.3 Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene ist die Gerade. Daher macht die lineare Funktion

$$y = f(x) = x$$

das Funktional aus Beispiel 3.2 extremal. ● ● ●

In Fällen, in denen man das Ergebnis nicht von vornherein kennt, geht man folgendermaßen vor: Man bezeichnet die gesuchte Funktion (diejenige, die das Funktional extremal macht und die Randbedingungen erfüllt) mit f . Weiterhin definiert man eine einparametrische Familie von Vergleichsfunktionen gemäß

$$\tilde{y} = \tilde{f}(x) := f(x) + \varepsilon \eta(x), \quad (16)$$

wobei $\eta(x)$ eine beliebige Funktion mit der Eigenschaft

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \quad (17)$$

ist (vgl. Abbildung 10). Offenbar erfüllt auch \tilde{f} die Randbedingungen. Setzt man \tilde{f} in

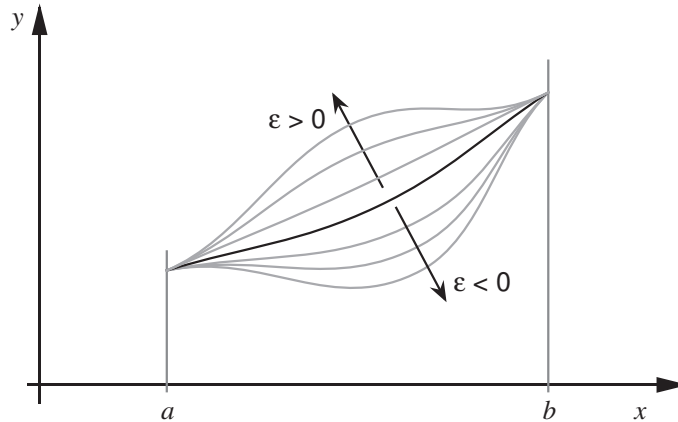


Abbildung 10: Vergleichsfunktionen für verschiedene Werte des Parameters ε

das Funktional ein, so hängt I vom Wert des Parameters ε ab:

$$I = I(\varepsilon).$$

Nach Voraussetzung wird das Funktional für $\varepsilon = 0$ extremal (dann ist $\tilde{f} \equiv f$). Daher kann man schließen

$$I(0) \text{ ist Extremum} \Rightarrow \left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (18)$$

Nach einer Zwischenrechnung (siehe Anhang 6) erhält man für die Ableitung

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \left. \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \eta \right|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \right) \eta \right] dx. \quad (19)$$

Da die Funktion η an den Rändern verschwindet (vgl. Formel 17) fällt der Randterm weg. Die Extremumsbedingung 18 lautet somit

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0 \quad (20)$$

(beachte: $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{y} \rightarrow y$). Da $\eta(x)$ eine (fast) beliebige Funktion ist, verschwindet das Integral nur dann, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer identisch Null ist. Damit haben wir die Aufgabe, eine Funktion f zu finden, die das Funktional 15 extremal macht, auf die Lösung einer partiellen Differentialgleichung (**Euler Gleichung**) zurückgeführt:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.}$$

Beispiel 3.4 $F(x, y, y') = \frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{1}{2}y'^2$ (vgl. Beispiel 3.1). Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y + x \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = -y'$$

lautet die Euler Gleichung

$$y'' + y = -x.$$

Dies ist die Differentialgleichung von Beispiel 2.1. Da wir ihre Lösung kennen, haben wir die vorliegende Variationsaufgabe schon gelöst! ● ● ●

3.3 Ritz Verfahren

Im vorigen Abschnitt wurde dargestellt, dass die Lösung einer Variationsaufgabe auf die Integration einer Differentialgleichung zurückgeführt werden kann. Falls man zur Euler Gleichung keine exakte Lösung findet, kommen Näherungslösungen wie z. B. die aus Kapitel 2 zum Einsatz. Dort wird zur Definition einer optimalen Lösung eine gewichtete Integration über das Residuum eingeführt (vgl. Gleichung 4). Dabei hat man bei der Wahl der Gewichtsfunktionen $w_k(x)$ gewisse Freiheiten, was z. B. auf die Methode der gewichteten Residuen oder das Galerkin-Verfahren führt. Man kann das Variationsproblem aber auch direkt, d. h. ohne den Umweg über die Euler Gleichung, per Näherungsverfahren zu lösen. Dies geschieht beim **Ritz Verfahren**. Dieses führt eindeutig auf die Galerkin-Lösung.

Beim Ritz Verfahren wird in das Funktional für die Funktion f ein Näherungsansatz von der in Gleichung 1 dargestellten Art eingesetzt. Damit wird der Wert des Funktionals abhängig von den N Koeffizienten c_j : $I = I(\mathbf{c})$.⁷ Eine notwendige Bedingung dafür, dass $I(\mathbf{c})$ bei $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{c}}$ einen Extremwert hat ist

$$\boxed{\left. \frac{\partial I(\mathbf{c})}{\partial c_j} \right|_{\mathbf{c}=\hat{\mathbf{c}}} = 0 \quad \text{für} \quad j \in \{1, 2, \dots, N\}.} \quad (21)$$

Beispiel 3.5 Das Funktional

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{1}{2}y'^2 \right) dx$$

ist unter den Nebenbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ mit Hilfe des Ritz Verfahrens extremal zu machen. Als Ansatzfunktion, die die Nebenbedingungen erfüllt, wählen wir

$$y_1(x) = c_1x(1 - x)$$

⁷Wie bereits früher, wurden die c_j zu einem Vektor \mathbf{c} zusammengefasst

(vgl. Beispiel 2.2). Damit

$$\begin{aligned} I(c_1) &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} c_1^2 x^2 (1-x)^2 + c_1 x^2 (1-x) - \frac{1}{2} c_1^2 (1-2x)^2 \right] dx \\ &= \frac{c_1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} c_1 \right). \end{aligned}$$

Da in diesem einfachen Beispiel nur ein Koeffizient auftritt, lautet die Extremwertbedingung 21 einfach:

$$\frac{dI(c_1)}{dc_1} = \frac{1}{12} - \frac{3}{10} c_1 = 0.$$

Damit ergibt sich $c_1 = 0.27778$ und die Näherungslösung stimmt mit der Galerkin Lösung aus Beispiel 2.6 überein. ● ● ●

3.4 ... und FEM zum Dritten

Das Ritz Verfahren bildet die Grundlage eines alternativen Zugangs zur Finite-Elemente-Methode. Dieser Zugang soll nun erläutert werden. Zunächst wird das Funktional in Beiträge zerlegt, die von den einzelnen Elementen herrühren.

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b F(x, y, y') dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x, y, y') dx \\ &= \sum_{i=1}^N I_i. \end{aligned}$$

Im i -ten Element sind nur die beiden Hütchen $H_{i-1}(x)$ und $H_i(x)$ von Null verschieden (Abbildung 7) und somit liefern nur diese beiden Hütchen einen Beitrag zu I_i .

Man führt zwei Funktionen N_0 und N_1 ein, die im betrachteten Element mit den beiden zugehörigen Hütchenfunktionen identisch sind:

$$\left. \begin{aligned} N_0(x) &:= H_{i-1}(x) = \frac{x_i - x}{h} \\ N_1(x) &:= H_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h} \end{aligned} \right\} \quad \text{für} \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i.$$

Für das Element macht man dann den Ansatz

$$y(x) \approx y_2 = \sum_{j=0}^1 c_j N_j(x),$$

also

$$y_2 = c_0 \frac{x_i - x}{h} + c_1 \frac{x - x_{i-1}}{h} \tag{22}$$

und

$$y'_2 = -\frac{c_0}{h} + \frac{c_1}{h}.$$

Unter Verwendung der schon früher angegebenen Substitution 10 schreibt man den Elementbeitrag zum Funktional um:

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x, y, y') dx \\ &= h \int_0^1 F(h\xi + x_{i-1}, y(h\xi + x_{i-1}), y'(h\xi + x_{i-1})) d\xi \\ &= h \int_0^1 F\left(h\xi + x_{i-1}, y(h\xi + x_{i-1}), \frac{1}{h} \frac{dy(h\xi + x_{i-1})}{d\xi}\right) d\xi. \end{aligned} \quad (23)$$

Im letzten Schritt wurde die Kettenregel angewendet:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy(h\xi + x_{i-1})}{d\xi}.$$

Drückt man die Näherungslösung in Gleichung 22 durch ξ aus, ergibt sich zunächst

$$y_2(h\xi + x_{i-1}) = c_0 + (c_1 - c_0)\xi$$

und weiter

$$\frac{1}{h} \frac{dy_2(h\xi + x_{i-1})}{d\xi} = \frac{1}{h}(c_1 - c_0).$$

Diese beiden Ausdrücke setzt man zur Ermittlung eines Näherungswertes für den Elementbeitrag I_i in Formel 23 ein.

Beispiel 3.6 Elementbeitrag für das Funktional aus Beispiel 3.1.

Für den Integranden erhält man

$$\begin{aligned} F\left(h\xi + x_{i-1}, y(h\xi + x_{i-1}), \frac{1}{h} \frac{dy(h\xi + x_{i-1})}{d\xi}\right) &= \\ &= \frac{1}{2} (c_0 + (c_1 - c_0)\xi)^2 + (h\xi + x_{i-1}) (c_0 + (c_1 - c_0)\xi) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h}(c_1 - c_0)\right)^2. \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und anschließende Integration über ξ liefert

$$I_i = \frac{h}{2} \left(c_0^2 + c_0(c_1 - c_0) + \frac{1}{3}(c_1 - c_0)^2 \right) \quad (24)$$

$$- \frac{1}{2h} (c_1 - c_0)^2 \quad (25)$$

$$+ \frac{h^2}{6} (c_0 + 2c_1) + x_{i-1} \frac{h}{2} (c_0 + c_1). \quad (26)$$

Der erste Term auf der rechten Seite (Zeile 24) kann mit Hilfe des Spaltenvektors

$$\mathbf{c}_i := \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

und der Elementmassenmatrix

$$\mathbf{M}_i = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

in die Form

$$\frac{1}{2} \mathbf{c}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{c}_i$$

gebracht werden. In analoger Weise kann der Term in Zeile 25 mit Hilfe der Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_i = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

in die Form

$$-\frac{1}{2} \mathbf{c}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{c}_i$$

gebracht werden.

Der verbleibende Term aus Zeile 26 lässt sich mit Hilfe der früher eingeführten Vektoren

$$\mathbf{s}_i := \frac{h^2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_i := \frac{h}{2} x_{i-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

in der Form

$$(\mathbf{s}_i^T + \mathbf{t}_i^T) \mathbf{c}_i$$

schreiben. Mit Hilfe der so eingeführten Vektoren und Matrizen lautet der Elementbeitrag also

$$I_i = \frac{1}{2} \mathbf{c}_i^T (\mathbf{M}_i - \mathbf{K}_i) \mathbf{c}_i + (\mathbf{s}_i^T + \mathbf{t}_i^T) \mathbf{c}_i.$$

• • •

Die Elementbeiträge müssen nun wieder assembliert werden. Das Ergebnis der Assemblierung kennen wir aus Abschnitt 2.5. Mit den dort berechneten Matrizen 11, 12 und Vektoren 13 lautet der Näherungsausdruck für das Funktional

$$I = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T (\mathbf{M} - \mathbf{K}) \mathbf{c} + (\mathbf{s}^T + \mathbf{t}^T) \mathbf{c}.$$

Anwendung der Extremwertbedingung 21 auf diesen Ausdruck liefert wiederum die Gleichung 14⁸. Bei oberflächlicher Betrachtung erscheinen das in Abschnitt 2.4 und das hier diskutierte Verfahren sehr unterschiedlich; dennoch liefern im vorliegenden Fall beide identische Ergebnisse. Ein Beispiel erübrigt sich also an dieser Stelle.

⁸Vgl. Anhang 6

4 Formfunktionen

Zu Beginn von Abschnitt 3.4 wurde für jedes Element ein Ansatz für die Näherungslösung der Differentialgleichung mit Hilfe zweier sogenannter **Formfunktionen** $N_j^{(1)}(x)$ gemacht:

$$y(x) \approx y_2(x) = \sum_{j=0}^1 c_j N_j^{(1)}(x).$$

Die $N_j^{(1)}(x)$ waren dabei lineare Funktionen (der hier in Klammern hinzugefügte Index 1 verweist auf ein Polynom ersten Grades), die nur im jeweiligen Element definiert sind.

Formfunktionen sind bei der FEM von zentraler Bedeutung und wir müssen uns darum kümmern, wie sie bestimmt werden. Auch dabei ist es wieder zweckmäßig, mittels der schon oben verwendeten Substitution (Gleichung 10) zur Variablen ξ überzugehen. Dies führt für den obigen Ansatz und das i -te Element, also für $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, auf

$$\tilde{y}_2(\xi) := y_2(h\xi + x_{i-1}) = \sum_{j=0}^1 c_j \tilde{N}_j^{(1)}(\xi)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{N}_0^{(1)}(\xi) &:= N_0^{(1)}(h\xi + x_{i-1}), \\ \tilde{N}_1^{(1)}(\xi) &:= N_1^{(1)}(h\xi + x_{i-1}) \end{aligned}$$

für $0 \leq \xi \leq 1$. Unser Ziel ist es, eine Verallgemeinerung dieses Ansatzes durch besser angepasste Formfunktionen zu ermitteln. Dazu verwendet man an Stelle der linearen Formfunktionen von Abschnitte 3.4 Potenzreihen vom Grad n . Auf diese Weise erhält man $n + 1$ linear unabhängige Formfunktionen:

$$\tilde{N}_j^{(n)}(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i^{(j)} \xi^i, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Mit Diesen Formfunktionen konstruiert man dann die Näherungslösung im Element wieder mit Hilfe von $n + 1$ Koeffizienten c_j :

$$\tilde{y}_{n+1}(\xi) = \sum_{j=0}^n c_j \tilde{N}_j^{(n)}(\xi). \quad (27)$$

Die definierende Eigenschaft der Formfunktionen ist, dass die Koeffizienten c_j an den Knotenpunkten mit den Funktionswerten der Näherungslösung übereinstimmen

(vgl. Gleichung 8). Daher werden die c_j als **Knotenvariablen** bezeichnet. Das bedeutet, dass die Formfunktionen am zugehörigen Knoten zu eins werden und an allen anderen Knoten des Elements verschwinden, formelmäßig also

$$\tilde{N}_j^{(n)}(\xi_i) = \delta_{ij},$$

wobei die ξ_i den Knotenvariablen entsprechen.

Beispiel 4.1 Den einfachsten nichttrivialen Potenzreihenansatz erhält man für $n = 1$:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_0^{(1)}(\xi) &= a_0^{(0)} + a_1^{(0)}\xi \\ \tilde{N}_1^{(1)}(\xi) &= a_0^{(1)} + a_1^{(1)}\xi.\end{aligned}$$

$\tilde{N}_0^{(1)}(\xi)$ soll am ersten Knoten des Elements i (also für $\xi = 0$, denn das entspricht dem Knoten x_{i-1}) zu 1 werden und am zweiten Knoten ($\xi = 1$ entspricht x_i) verschwinden:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_0^{(1)}(0) &= a_0^{(0)} = 1 \\ \tilde{N}_0^{(1)}(1) &= a_0^{(0)} + a_1^{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1^{(0)} = -1.\end{aligned}$$

Bei $\tilde{N}_1^{(1)}(\xi)$ ist es umgekehrt:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_1^{(1)}(0) &= a_0^{(1)} = 0 \\ \tilde{N}_1^{(1)}(1) &= a_0^{(1)} + a_1^{(1)} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1^{(1)} = 1.\end{aligned}$$

Für die Näherungslösung der Differentialgleichung bzw. des Variationsproblems erhält man also gemäß Gleichung 27 für den Fall $n = 1$

$$\tilde{y}_2(\xi) = c_0 \tilde{N}_0^{(1)}(\xi) + c_1 \tilde{N}_1^{(1)}(\xi)$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{N}_0^{(1)}(\xi) &:= 1 - \xi \\ \tilde{N}_1^{(1)}(\xi) &:= \xi.\end{aligned}} \quad (28)$$

Dies sind die bisher verwendeten linearen Formfunktionen. Sie sind in Abbildung 11 dargestellt. ● ● ●

Beispiel 4.2 Für $n = 2$ lautet der Potenzreihenansatz

$$\tilde{N}_j^{(2)}(\xi) = a_0^{(j)} + a_1^{(j)}\xi + a_2^{(j)}\xi^2, \quad j = 0, 1, 2.$$

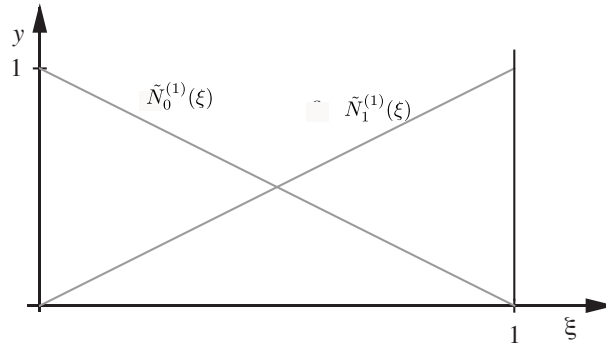


Abbildung 11: Die beiden einfachsten Formfunktionen

Um die drei auftretenden Koeffizienten bestimmen zu können, reichen zwei Knotenpunkte nicht aus. Daher führt man einen weiteren Knotenpunkt in der Mitte des Elements ein ($\xi = \frac{1}{2}$). Damit muss $\tilde{N}_0^{(2)}(\xi)$ am ersten Elementknoten, $\tilde{N}_1^{(2)}(\xi)$ am Mittelknoten und $\tilde{N}_2^{(2)}(\xi)$ am Endknoten den Wert 1 annehmen. An den restlichen Elementknoten müssen die Formfunktionen verschwinden. Also gilt beispielsweise für $\tilde{N}_0^{(2)}(\xi)$

$$\begin{aligned}\tilde{N}_0^{(2)}(0) &= a_0^{(0)} = 1 \\ \tilde{N}_0^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) &= a_0^{(0)} + \frac{1}{2}a_1^{(0)} + \frac{1}{4}a_2^{(0)} = 0 \\ \tilde{N}_0^{(2)}(1) &= a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} = 0.\end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $a_i^{(0)}$. Seine Lösung führt auf

$$a_0^{(0)} = 1, \quad a_1^{(0)} = -3, \quad a_2^{(0)} = 2,$$

also

$$\tilde{N}_0^{(2)}(\xi) = 1 - 3\xi + 2\xi^2 = (1 - \xi)(1 - 2\xi).$$

Analog verfährt man mit den restlichen beiden Formfunktionen und erhält

$$\begin{array}{l} \tilde{N}_0^{(2)}(\xi) := (1 - \xi)(1 - 2\xi) \\ \tilde{N}_1^{(2)}(\xi) := 4\xi(1 - \xi) \\ \tilde{N}_2^{(2)}(\xi) := -\xi(1 - 2\xi). \end{array} \quad (29)$$

Diese drei quadratischen Formfunktionen sind in Abbildung 12 dargestellt. Die Näherungslösung für $n = 2$ lautet

$$\tilde{y}_3(\xi) = c_0 \tilde{N}_0^{(2)}(\xi) + c_1 \tilde{N}_1^{(2)}(\xi) + c_2 \tilde{N}_2^{(2)}(\xi). \quad (30)$$

Die Assemblierung erfolgt bei Verwendung quadratischer Formfunktionen anhand von Abbildung 13 und Tabelle 4. ● ● ●

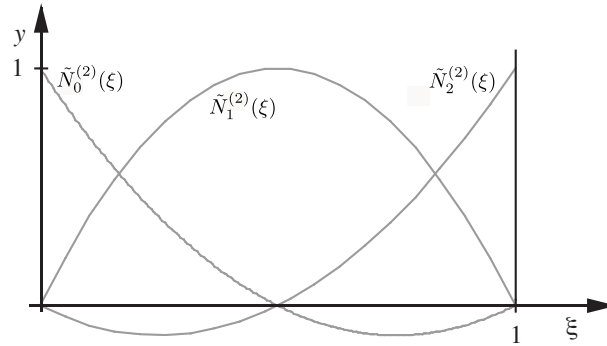


Abbildung 12: Die zum quadratischen Ansatz gehörenden Formfunktionen

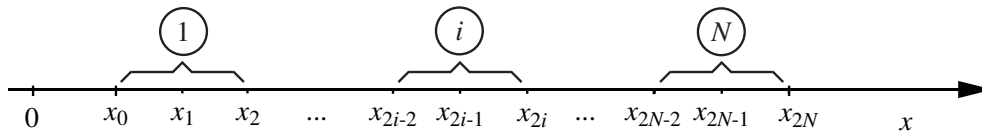


Abbildung 13: Knotenkoordinaten und Elementnummern (im Kreis)

Beispiel 4.3 Das Funktional

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 + xy - \frac{1}{2} y'^2 \right) dx$$

ist unter den Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ mit Hilfe der Finite-Element-Methode extremal zu machen. Dabei soll der gesamte Definitionsbereich als ein Element betrachtet und die quadratischen Formfunktionen 29 verwendet werden.

Es ist offensichtlich, dass es mit den linearen Formfunktionen 28 nicht möglich ist eine Näherungslösung mit nur einem Element zu konstruieren. Unter Verwendung des quadratischen Ansatzes gelingt dies aber. Setzt man 30 mit den Formfunktionen 29 als Näherungsansatz in das Elementfunktional ein, so ergibt sich wiederum

$$I_i = \frac{1}{2} \mathbf{c}_i^T (\mathbf{M}_i - \mathbf{K}_i) \mathbf{c}_i + (\mathbf{s}_i^T + \mathbf{t}_i^T) \mathbf{c}_i,$$

wobei die Matrizen jetzt aber folgendermaßen definiert sind:

$$\mathbf{M}_i := \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_i := \frac{1}{3h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix},$$

und

$$\mathbf{s}_i := \frac{h^2}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{t}_i := \frac{h}{6} x_{i-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

	0	1	2
1	0	1	2
2	2	3	4
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
i	$2i - 2$	$2i - 1$	$2i$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
N	$2N - 2$	$2N - 1$	$2N$

Tabelle 4: Zuordnung Elementnummer (linke Spalte) / lokale Knotennummer (erste Zeile) \leftrightarrow globale Knotennummer

Da gemäß Vorgabe nur ein Element verwendet werden soll gilt $I = I_i$ und die Systemmatrizen sind identisch mit den Elementmatrizen. Unter Beachtung von $i = 1$, $h = 1$ und $a = 0$ lautet die Extremwertbedingung 21 (vgl. Anhang 6)⁹:

$$\begin{bmatrix} -66 & 82 & -11 \\ 82 & -144 & 82 \\ -11 & 82 & -66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Wegen der Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ ($\Rightarrow c_0 = c_2 = 0$) müssen die erste und die dritte Gleichung wieder weggelassen werden:

$$\begin{bmatrix} -144 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \end{bmatrix},$$

woraus sich $c_1 = 0.06944$ ergibt.

Für das erste (und in diesem Fall einzige) Element lautet die Näherungslösung 27 also

$$\tilde{y}_3(\xi) = 4c_1\xi(1 - \xi) = 0.27778 \xi(1 - \xi).$$

Ausgedrückt durch x erhält man wegen $\xi = \frac{x-0}{1} = x$ (vgl. Gleichung 10),

$$y_3(x) = 0.2777 x(1 - x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

Dies ist interessanterweise die Galerkin-Lösung y_1 von Beispiel 2.6 (vgl. Abbildung 2). •••

Natürlich verwendet man in der Praxis auch bei quadratischen Formfunktionen mehr als ein Element. Dies funktioniert analog wie im Falle der linearen Formfunktionen wie das folgenden Beispiel zeigt:

⁹hierbei wurde mit 30 erweitert

Beispiel 4.4 Das Funktional

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{1}{2}y'^2 \right) dx$$

ist unter den Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ mit Hilfe der Finite-Element-Methode extremal zu machen. Dabei soll der Definitionsbereich in zwei gleiche Elemente aufgeteilt und quadratische Formfunktionen verwendet werden.

Die Elementmatrizen wurden bereits in Beispiel 4.3 bestimmt und können übernommen werden. Geht man gemäß Tabelle 4 zur globalen Numerierung über, ergeben sich die folgenden Matrizen (Indizes geben wiederum die Elementnummer an):

$$\mathbf{M}_1 = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{s}_1 = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

denn $h = \frac{1}{2}$, $x_0 = 0$ und $x_1 = 1/2$.

Aufaddieren führt auf die Systemmatrizen

$$\mathbf{M} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{s} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{s} + \mathbf{t} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Extremwertbedingung 21 liefert

$$\frac{1}{60} \begin{bmatrix} -276 & 322 & -41 & 0 & 0 \\ 322 & -624 & 322 & 0 & 0 \\ -41 & 322 & -552 & 322 & -41 \\ 0 & 0 & 322 & -624 & 322 \\ 0 & 0 & -41 & 322 & -276 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Randbedingungen, $c_0 = 0$ und $c_4 = 0$, werden wieder berücksichtigt, indem die ersten und die fünften Zeilen/Spalten gestrichen werden. Dies ergibt (nach Multiplikation beider Seiten mit 60):

$$\begin{bmatrix} -312 & 161 & 0 \\ 161 & -276 & 161 \\ 0 & 161 & -321 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet $c_1 = 0.04400$, $c_2 = 0.06974$ und $c_3 = 0.06003$.

Die Lösungsfunktion muss elementweise aufgebaut werden. Dazu geht man für die Knotenvariablen mit Hilfe von Tabelle 4 wieder zur Elementnumerierung über. Für das erste Element stimmen globale und lokale Numerierung wie in Beispiel 4.3 überein und man erhält

$$\begin{aligned} \tilde{y}_3(\xi) &= 4c_1\xi(1-\xi) - c_2\xi(1-2\xi) \\ &= \xi(0.10626 - 0.03652\xi). \end{aligned}$$

Ausgedrückt durch x ergibt sich wegen $\xi = \frac{x-0}{1/2} = 2x$ (Gleichung 10),

$$y_3(x) = x(0.21252 - 0.14608x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1/2.$$

Für das zweite Element lautet die Umnnumerierung $c_2 \rightarrow c_0$, $c_3 \rightarrow c_1$ und $c_4 \rightarrow c_2$ und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{y}_3(\xi) &= c_0(1-\xi)(1-2\xi) + 4c_1\xi(1-\xi) \\ &= 0.06974 + 0.03090\xi - 0.10064\xi^2. \end{aligned}$$

und folglich ($\xi = \frac{x-1/2}{1/2}$)

$$y_3(x) = 0.06974 + 0.06180(x - 1/2) - 0.04026(x - 1/2)^2.$$

Zusammengefasst lautet die Näherungslösung also

$$y_3(x) = \begin{cases} 0.0.21252 x - 0.14608 x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0.0.06974 + 0.06180 (x - \frac{1}{2}) - 0.40256 (x - \frac{1}{2})^2 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Auf eine graphische Darstellung der Näherungslösung kann verzichtet werden, weil sie von der exakten Lösung kaum zu unterscheiden ist. ● ● ●

5 Randbedingungen

5.1 Dirichletsche Randbedingungen

Bisher haben wir ausschließlich mit den Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ gearbeitet. Im vorliegenden Abschnitt soll dargestellt werden, wie man vorzugehen hat, wenn die vorgegebenen Randbedingungen nicht von dieser einfachen Art sind. Zunächst sei aber zusammenfassend wiederholt, wie die Randbedingungen bisher in die FEM-Lösung eingearbeitet wurden.

Allgemein führt der FEM-Ansatz für lineare Differentialgleichungen auf ein lineares Gleichungssystem:

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{b}. \tag{32}$$

Hierbei steht \mathbf{A} für die Systemmatrix und \mathbf{b} für den Systemvektor (in den Beispielen $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{K}$ und $\mathbf{b} = -(\mathbf{s} + \mathbf{t})$). In \mathbf{c} sind die Systemknotenvariablen zusammengefasst¹⁰. Bezeichnet r_i einen Randpunkt, für den eine **homogene Randbedingung** $y(r_i) = 0$ vorgegeben ist, so muss in der Matrix \mathbf{A} die zum Knotenpunkt r_i gehörende Spalte gestrichen werden. Dies macht man sich klar indem man beachtet, dass die Randbedingung, ausgedrückt durch die Knotenvariable, $c_i = 0$ bedeutet. Da die Randbedingung die Zahl der Unbekannten verringert, muss die zu r_i gehörende Zeile des Gleichungssystems 32 gestrichen werden, da sonst das Gleichungssystem überbestimmt wäre. Diese Prozedur ist für alle vorgegebenen homogenen Randbedingungen zu wiederholen. Die Lösung des verbleibenden Gleichungssystems liefert die gesuchte Näherungslösung.

Zur Erinnerung: Beim Ritz-Verfahren (Abschnitt 3.3) suchte man das Extremum des Funktionals $I(\mathbf{c})$ durch Variation nach den c_i , die in der Näherungslösung vorkommen. Zu jedem dieser c_i gehört dann eine entsprechende Zeile im Gleichungssystem 32. Kommt ein c_i und die zugehörige Hütchenfunktion H_i in der Näherungslösung gar nicht vor, z. B. c_0 und H_0 bei $y(a) = 0$, so gibt es die zu c_i gehörige Zeile im Gleichungssystem 32 gar nicht, und sie muss deshalb gestrichen werden.

Sind die Randbedingungen von der Form $y(r_i) = d_i$, wobei die d_i irgendwelche von Null verschiedene Konstanten sind, so spricht man von **inhomogenen Randbe-**

¹⁰wenn vorhanden, wurden in den vorangegangenen Beispielen gemeinsame Faktoren herausgekürzt

dingungen. Beim Vorliegen von n inhomogenen Randbedingungen ist das oben beschriebene Verfahren zu modifizieren. Zunächst muss ein neuer Systemvektor gemäß

$$\mathbf{b}^* := \mathbf{b} - \sum_i^n d_i \mathbf{A}_{,i}$$

bestimmt werden. Hierbei bezeichnet $\mathbf{A}_{,i}$ den aus der i -ten Spalte von \mathbf{A} gebildeten Spaltenvektor. Die Bestimmung der Systemknotenvariablen c_i für das System mit inhomogenen Randbedingungen kann damit auf das Verfahren für homogene Randbedingungen zurückgeführt werden, wenn man das modifizierte Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}^*$$

verwendet. Zusätzlich muss man jetzt auch die Rand-Knotenvariablen, also c_0 bzw. c_N , berücksichtigen, indem man ihnen die zugehörigen inhomogenen Randwerte d_i zuweist.

Beispiel 5.1 Das Funktional

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{1}{2}y'^2 \right) dx$$

ist unter den Randbedingungen $y(0) = 0, y(1) = 0.1$ mit Hilfe der Finite-Element-Methode extremal zu machen. Dabei soll der Definitionsbereich in zwei gleiche Elemente aufgeteilt und lineare Formfunktionen verwendet werden.

Die Systemgleichung wird nach dem inzwischen bekannten Verfahren bestimmt (siehe die Gleichungen 11 bis 14) und lautet

$$\begin{bmatrix} -22 & 25 & 0 \\ 25 & -44 & 25 \\ 0 & 25 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Die inhomogene Randbedingung bezieht sich auf den dritten Knoten und daher

$$\mathbf{b}^* = -0.5 \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} - 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ -22 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.5 \\ 5.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}.$$

Das modifizierte System lautet damit

$$\begin{bmatrix} -22 & 25 & 0 \\ 25 & -44 & 25 \\ 0 & 25 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.5 \\ 5.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}.$$

Streichen von Zeilen und Spalten für die beiden Knoten mit Randbedingungen führt auf

$$\begin{bmatrix} -44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \end{bmatrix}.$$

und damit auf $c_1 = 0.12500$. Da $c_2 = 0.1$ durch eine Randbedingung vorgegeben ist, ergibt sich als Näherungslösung

$$y(x) = \begin{cases} 0.25000 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0.15000 - 0.05000 x & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Die zum Funktional gehörende Euler-Gleichung hat die allgemeine Lösung $y(x) = k_1 \sin x + k_2 \cos x - x$. Wendet man hierauf die Randbedingungen an, so erhält man die exakte Lösung $y(x) = \frac{11 \sin x}{10 \sin 1} - x$. Diese ist zusammen mit der Näherungslösung in Abbildung 14 dargestellt. ● ● ●

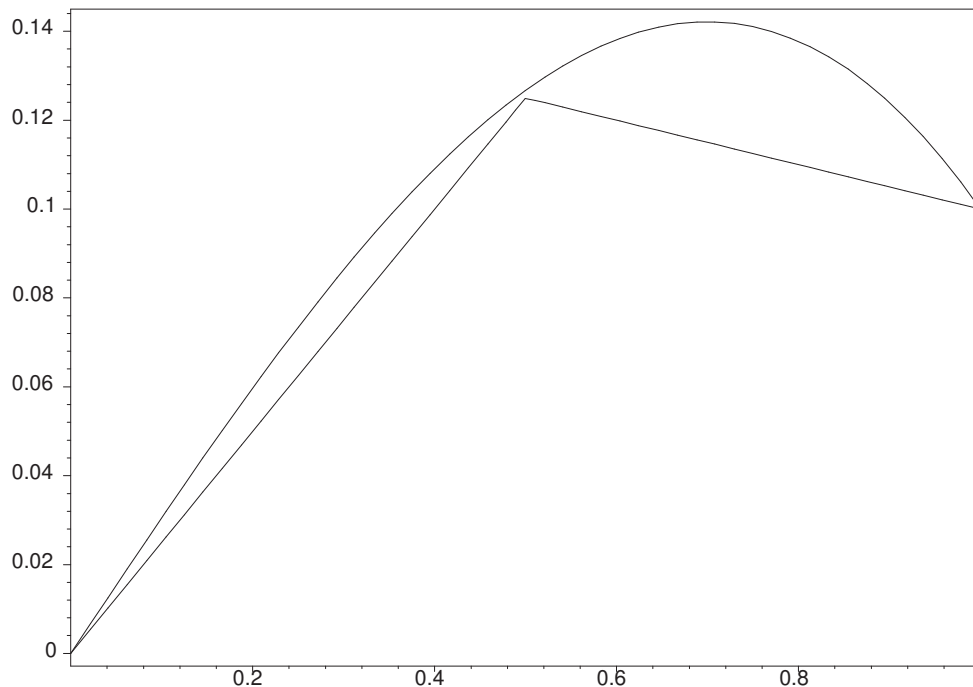


Abbildung 14: Exakte Lösung und Näherungslösung

Die bisher betrachteten Randbedingungen sind von der Form

$$y(r_i) = d_i,$$

was den homogenen Fall mit einschließt. Derartige Randbedingungen heißen **Dirichletsche Randbedingungen**.

5.2 Neumannsche Randbedingungen

Häufig bestehen Randbedingungen nicht in einer Bedingung an die Funktionswerte selbst, sondern an deren Ableitung. Geometrisch bedeutet dies, dass an den Rändern an Stelle des Funktionswertes die Steigung der Funktion vorgegeben ist.

Die Herleitung der Euler Gleichung aus dem Variationsprinzip in Abschnitt 3.2 wurde für den Fall homogener Dirichlet Randbedingungen durchgeführt. Daher waren nur solche Funktionen $\eta(x)$ zugelassen, die an den Randpunkten verschwinden (vgl. 17). Lässt man die Voraussetzung homogener Dirichlet Randbedingungen fallen, kann man nicht mehr davon ausgehen, dass der Randterm in Gleichung 19 wegfällt und anstelle von Gleichung 20 tritt

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial F}{\partial y'}\eta\bigg|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0.$$

Damit dieser Ausdruck verschwindet, muss neben der Euler Gleichung auch

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(a) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(b) = 0 \quad (34)$$

gelten, falls an a und b beliebige Variationen $\eta(x)$ der Funktion zugelassen sind, also der Funktionswert nicht festgelegt ist. An den beiden Rändern können natürlich auch unterschiedliche Randbedingungen auftreten, z. B. am Rand a eine feste Steigung und an Rand b ein fester Funktionswert. Dann wird Gleichung 34 nur an der Stelle $x = a$ gefordert während für Punkt b $\eta(b) = 0$ gilt.

Beispiel 5.2 $F(x, y, y') = \frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{1}{2}y'^2$ (vgl. Beispiel 3.1).
Die Euler Gleichung lautet (vgl. Beispiel 3.4)

$$y'' + y = -x.$$

Weiterhin gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x) = -y'$$

und wegen 34

$$y'(a) = 0 \quad \text{sowie} \quad y'(b) = 0. \quad (35)$$

Es ist bemerkenswert, dass die Funktion $y(x)$, die das Funktional extremal macht, die Randbedingungen 35 erfüllt, obwohl keine expliziten Randbedingungen vorgegeben wurden! Randbedingungen, die sich auf diese Weise sozusagen von selbst ergeben, nennt man auch **natürliche Randbedingungen**. ● ● ●

Beispiel 5.3 Das Funktional

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{1}{2}y'^2 \right) dx$$

ist unter den Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(1) = 0$ mit Hilfe der Finite-Element-Methode extremal zu machen. Dabei soll der Definitionsbereich in zwei gleiche Elemente aufgeteilt und lineare Formfunktionen verwendet werden.

Die Systemgleichung ist wieder durch das Gleichungssystem 33 gegeben. Die homogene Dirichletsche Randbedingung $y(0) = 0$ wird in der üblichen Weise eingebaut, indem man die erste Spalte und erste Zeile aus der Matrix entfernt. Die dritte Zeile bleibt jedoch im Gegensatz zu Beispiel 5.1 erhalten:

$$\begin{bmatrix} -88 & 50 \\ 50 & -44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Die zweite Randbedingung $y'(1) = 0$ wird nach oben Gesagtem sozusagen automatisch berücksichtigt - allerdings nur näherungsweise. Die Lösung des Gleichungssystems 36 führt auf $c_1 = 0.37464$ und $c_2 = 0.53936$. Daraus ergibt sich die Lösung

$$y(x) = \begin{cases} 0.74928 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0.20992 + 0.32944 x & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Die Näherungslösung erfüllt am rechten Rand die Randbedingung nicht exakt (vgl. Abbildung 15). Man kann sich aber leicht vorstellen, wie die Randbedingung $y'(1) = 0$ (horizontaler Funktionsverlauf) bei feinerer Elementteilung beliebig genau erfüllt wird. ● ● ●

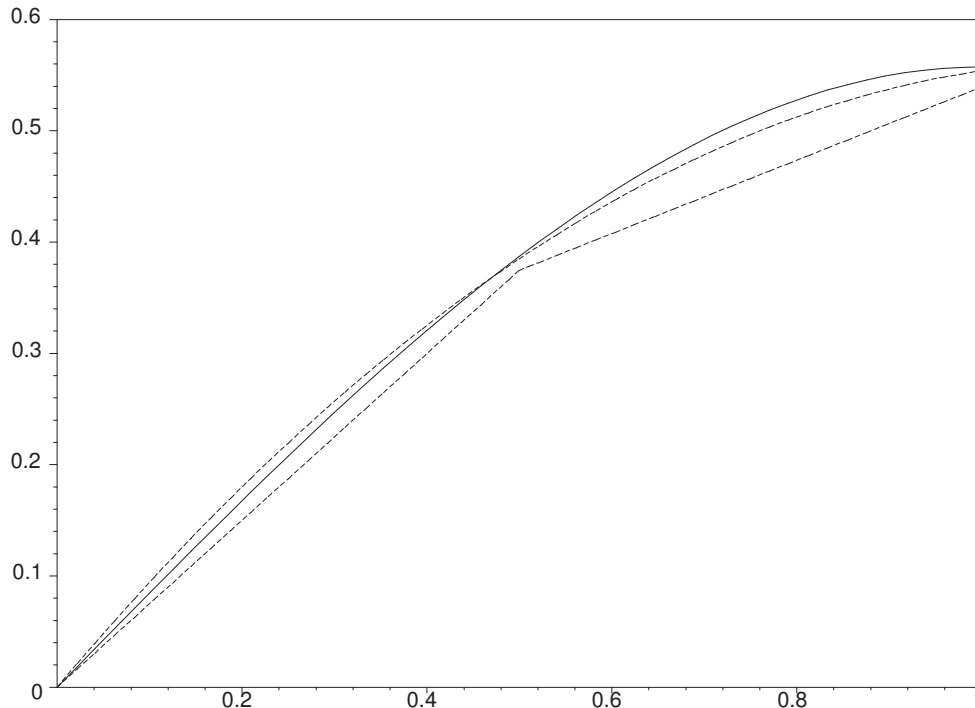


Abbildung 15: Exakte Lösung $y = \frac{\sin x}{\cos 1} - x$ (durchgezogene Kurve) und Näherungslösungen

Beispiel 5.4 Das Funktional

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 + xy - \frac{1}{2} y'^2 \right) dx$$

ist unter den Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(1) = 0$ mit Hilfe der Finite-Element-Methode extremal zu machen. Dabei soll der gesamte Definitionsbereich als ein Element aufgefasst und quadratische Formfunktionen verwendet werden.

Die Systemgleichung ist durch das Gleichungssystem 31 gegeben. Berücksichtigung der Dirichletschen Randbedingung $y(0) = 0$ führt auf

$$\begin{bmatrix} -144 & 82 \\ 82 & -66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

mit der Lösung $c_1 = 0.38489$ und $c_2 = 0.55396$. Die zugehörige Näherungslösung

$$y(x) = 0.98560x - 0.43164x^2$$

ist ebenfalls in Abbildung 15 dargestellt. ● ● ●

Dass die Ableitung an den Rändern zu Null wird, ist natürlich nur ein Spezialfall. Als nächstes soll deshalb der allgemeine Fall behandelt werden, in dem die Ableitung an den Rändern mit einem Wert ungleich Null vorgegeben ist. Derartige Randbedingungen kommen in physikalischen Anwendungen vor (z. B. bei der Wärmeleitung).

Ergänzt man das Funktional 15 zu

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx + \gamma_b y(b) - \gamma_a y(a)$$

und verfährt man wie bei den natürlichen Randbedingungen, so erhält man anstelle von 34 als Verallgemeinerung die sogenannten **Neumannschen Randbedingungen**¹¹

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y'}(a) + \gamma_a = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(b) + \gamma_b = 0.} \quad (37)$$

Beispiel 5.5 $F(x, y, y') = \frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{1}{2}y'^2$ (vgl. Beispiel 3.1).

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x) = -y'.$$

Aus 37 folgt daher

$$y'(a) = \gamma_a \quad \text{und} \quad y'(b) = \gamma_b.$$

● ● ●

Im Zusammenhang mit der FEM ist es zweckmäßig die γ_i zu einem Spaltenvektor

$$\mathbf{g} := [-\gamma_a, 0, \dots, 0, \gamma_b]^T$$

¹¹Die natürlichen Randbedingungen sind als Spezialfall enthalten

zusammenzufassen. Sind an einem Ende an Stelle der Ableitungen die Funktionswerte vorgegeben, dann wird das zugehörige γ_i auf null gesetzt. Die Neumannschen Randbedingungen werden berücksichtigt, indem man vom Systemvektor \mathbf{b} zum modifizierten Systemvektor

$$\mathbf{b}^* := \mathbf{b} - \mathbf{g}$$

übergeht.

Beispiel 5.6 Das Funktional

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{1}{2}y'^2 \right) dx$$

ist unter den Randbedingungen $y(0) = 0, y'(1) = 1$ mit Hilfe der Finite-Element-Methode extremal zu machen. Dabei soll der Definitionsbereich in zwei gleiche Elemente aufgeteilt und lineare Formfunktionen verwendet werden.

Die Systemmatrix und den Systemvektor übernehmen wir aus früheren Beispielen:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -22 & 25 & 0 \\ 25 & -44 & 25 \\ 0 & 25 & -22 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Der Vektor \mathbf{g} lautet

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und daher

$$\mathbf{b}^* = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

Die Extremwertbedingung liefert

$$\begin{bmatrix} -22 & 25 & 0 \\ 25 & -44 & 25 \\ 0 & 25 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

Die Randbedingung $y(0) = 0$ führt in gewohnter Weise auf

$$\begin{bmatrix} -44 & 25 \\ 25 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ 29 \end{bmatrix}$$

und dies auf $c_1 = 1.2493$ und $c_2 = 2.0787$. Als Näherungslösung erhält man damit (vgl. Abbildung 16)

$$y(x) = \begin{cases} 2.4985 x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0.41982 + 1.6589 x & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

• • •

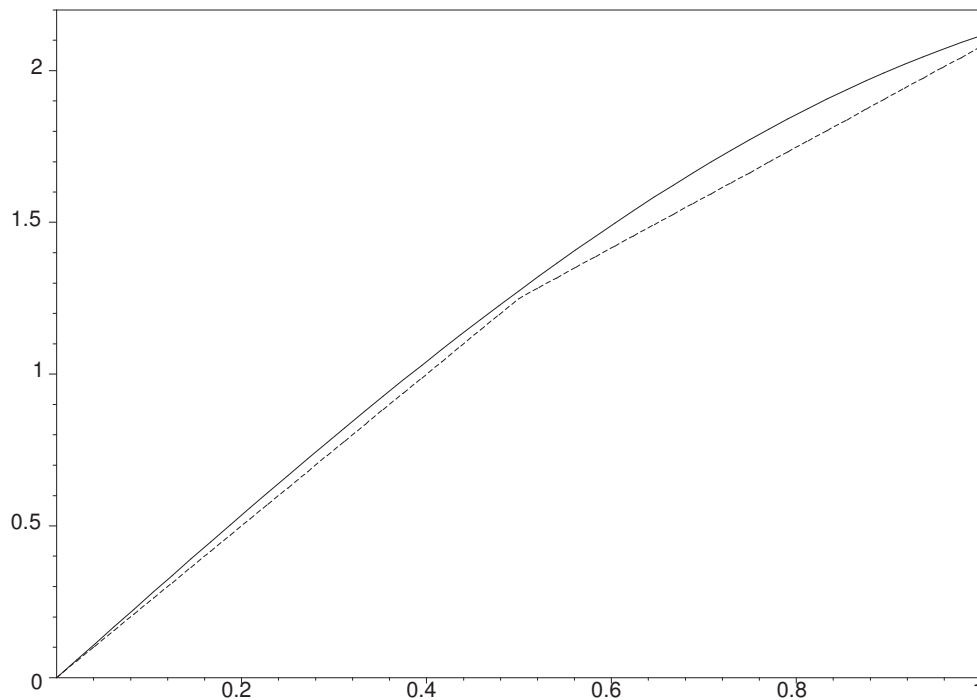


Abbildung 16: Exakte Lösung $y(x) = \frac{2 \sin x}{\cos 1} - x$ und Näherungslösungen für ein Beispiel mit inhomogenen Neumannschen Randbedingung am rechten Rand

Beispiel 5.7 Das Funktional

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 + xy - \frac{1}{2} y'^2 \right) dx$$

ist unter den Randbedingungen $y'(0) = +0.1$ und $y'(1) = -0.1$ mit Hilfe der Finite-Element-Methode extremal zu machen. Dabei soll der Definitionsbereich in zwei gleiche Elemente aufgeteilt und lineare Formfunktionen verwendet werden.

Das meiste kann aus der vorigen Aufgabe übernommen werden. Lediglich die Spaltenvektoren \mathbf{g} und \mathbf{b}^* sind zu modifizieren:

$$\mathbf{b}^* = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} +1.4 \\ -6.0 \\ -2.6 \end{bmatrix} .$$

Die Extremwertbedingung lautet jetzt

$$\begin{bmatrix} -22 & 25 & 0 \\ 25 & -44 & 25 \\ 0 & 25 & -22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} +1.4 \\ -6.0 \\ -2.6 \end{bmatrix}$$

und deren Lösung ist $c_0 = -0.35822$, $c_1 = -0.28723$ und $c_2 = -0.26731$. Daraus ergibt sich die Näherungslösung

$$y(x) = \begin{cases} -0.35822 + 0.14198x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -0.30715 + 0.039840x & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Der exakte Funktionsverlauf wird durch die Näherungslösung im Rahmen des Möglichen recht gut wiedergegeben. Insbesondere am rechten Rand wird aber deutlich, dass die Näherungslösung die Randbedingung nicht annähernd erfüllt (Abbildung 17).●●●

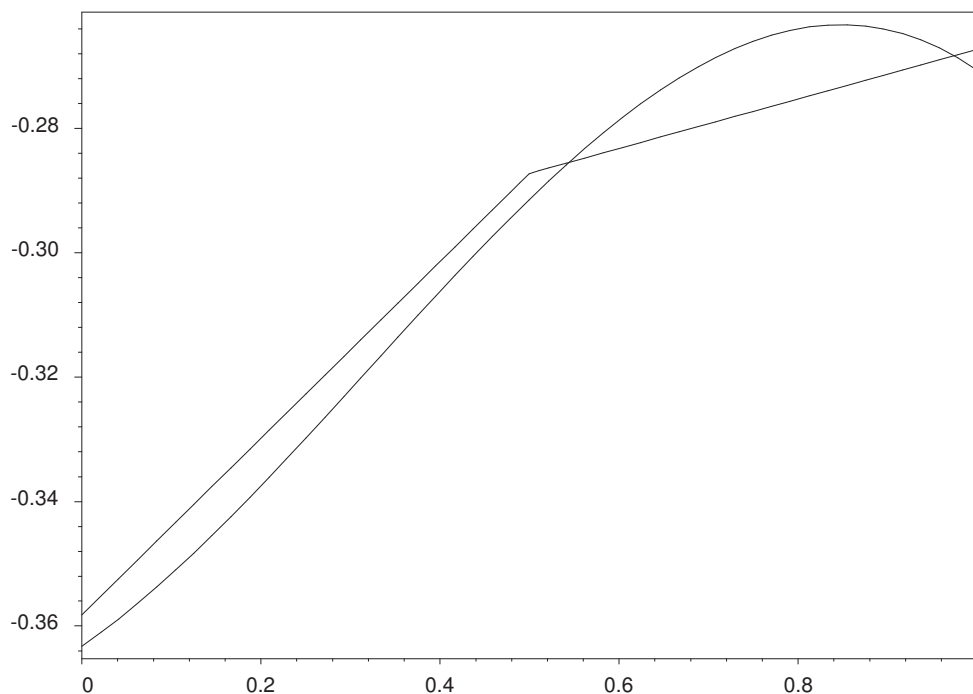


Abbildung 17: Exakte Lösung $y(x) = 1.1 \sin x + \frac{1.1 \cos 1 - 0.9}{\sin 1} \cos x - x$ und Näherungslösungen für ein Beispiel mit inhomogenen Neumannschen Randbedingung an beiden Rändern

5.3 Cauchysche Randbedingungen

Abschließend soll noch eine weitere Variante diskutiert werden. In praktischen Anwendungen kommen Randbedingungen der Form

$$y'(a) = \alpha_a y(a) \quad \text{und} \quad y'(b) = \alpha_b y(b). \quad (38)$$

Die modifizierte Systemmatrix lautet daher

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{M} - \mathbf{K} + \mathbf{B} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -22 & 25 & 0 \\ 25 & -44 & 25 \\ 0 & 25 & -34 \end{bmatrix}.$$

Nach dem Einbau der Dirichletschen Randbedingung am linken Rand erhält man die Systemgleichung

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} -44 & 25 \\ 25 & -34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

mit der Lösung $c_1 = 0.18886$ und $c_2 = 0.21240$. Auf eine Darstellung der Näherungslösung soll hier verzichtet werden. ●●●

In der Praxis treten auch Randbedingungen auf, bei denen am gleichen Randpunkt sowohl α als auch γ von Null verschieden ist.

6 Schlussbemerkungen

Die Finite-Elemente-Methode entfaltet ihre Leistungsfähigkeit erst bei zwei- und dreidimensionalen Feldproblemen. Analytische Rechnungen werden dann natürlich aufwändig und daher wollen wir solche höherdimensionalen Probleme im Rahmen dieser elementaren Einführung nicht behandeln. Hierzu wird auf das Lehrbuch von M. Jung und U. Langer (*Methode der finiten Elemente für Ingenieure*, 1. Auflage, Teubner 2001) und die dort zitierte Literatur verwiesen.

Abschließend sollen noch einige Vorteile der Finite-Elemente-Methode aufgelistet werden:

- ▷ Wie früher erwähnt führt die FEM auf Bandmatrizen. Das Auflösen von Gleichungssystemen erfordert in diesem Fall vergleichsweise wenig Rechenaufwand.
- ▷ Aufgrund des hohen Formalisierungsgrades eignet sich die FEM zur Umsetzung in Computerprogrammen. Tatsächlich hat die Methode ihren Siegeszug erst mit dem Aufkommen leistungsfähiger Computersysteme begonnen.
- ▷ Der vielleicht größte Vorteil der FEM besteht darin, dass sie die Modellierung von Problemen mit geometrisch komplexen Definitionsbereichen erlaubt. Denn die in der praktischen Anwendung vorkommenden Problemstellungen beinhalten meistens eine nichteinfache Geometrie.

Anhang

Differentialoperatoren

Der **Nabla Operator** ist ein Vektor-Differentialoperator. In kartesischen Koordinaten lautet die Definition des Nabla Operators

$$\vec{\nabla} := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Manchmal ist es zweckmäßig, die Verallgemeinerung des Nabla-Operators für einen N -dimensionalen abstrakten Raum einzuführen:

$$\nabla := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_N} \end{bmatrix}.$$

Für Vektoren sind das Skalarprodukt und das Kreuzprodukt definiert.

Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Analog ($\vec{v}(\vec{r})$ bezeichnet ein Vektorfeld):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} := \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Das skalare Feld $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ bezeichnet man als die **Divergenz** von $\vec{v}(\vec{r})$.

Achtung: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ aber $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \neq \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$.

Das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit sich selbst definiert den **Laplace-Operator**

$$\Delta := \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dieser kann auf skalare Felder oder auf die Komponenten eines Vektorfeldes wirken.

Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Analog ($\vec{v}(\vec{r})$ bezeichnet wieder ein Vektorfeld):

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Das Vektorfeld $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ bezeichnet man als die **Rotation** von $\vec{v}(\vec{r})$.

Achtung: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ aber $\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq -\vec{v} \times \vec{\nabla}$.

Extremwertbedingung

I sei eine skalare Größe, deren Wert von den N Größen $c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_N$ abhängt. Fasst man die c_i zu einem Spaltenvektor \mathbf{c} zusammen, so kann man $I = I(\mathbf{c})$ schreiben. Im Folgenden wollen wir voraussetzen, dass I von der Form

$$I(\mathbf{c}) = I_1(\mathbf{c}) + I_2(\mathbf{c})$$

mit

$$I_1(\mathbf{c}) := \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{c} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N c_i A_{ij} c_j$$

und

$$I_2(\mathbf{c}) := \mathbf{a}^T \mathbf{c} = \sum_{i=1}^N a_i c_i$$

ist. Dabei steht \mathbf{A} für eine symmetrische $N \times N$ -Matrix und \mathbf{a} sowie \mathbf{c} für Spaltenvektoren mit N Komponenten.

Es soll nun untersucht werden, wie die Extremwertbedingung

$$\frac{\partial I(\mathbf{c})}{\partial c_k} = 0 \quad \text{für } k \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \text{vektorielle Schreibweise } \nabla I = \mathbf{0},$$

im vorliegenden Fall aussieht. Da

$$\frac{\partial I(\mathbf{c})}{\partial c_k} = \frac{\partial I_1(\mathbf{c})}{\partial c_k} + \frac{\partial I_2(\mathbf{c})}{\partial c_k},$$

kann das Problem in zwei Teilprobleme zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1(\mathbf{c})}{\partial c_k} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} \frac{\partial c_i c_j}{\partial c_k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} \left(\frac{\partial c_i}{\partial c_k} c_j + c_i \frac{\partial c_j}{\partial c_k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} (\delta_{ik} c_j + c_i \delta_{jk}), \end{aligned}$$

mit

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } j = i \\ 0 & \text{falls } j \neq i \end{cases}$$

(Kronecker Symbol). Weiterhin

$$\frac{\partial I_1(\mathbf{c})}{\partial c_k} = \frac{1}{2} \sum_j A_{kj} c_j + \frac{1}{2} \sum_i A_{ik} c_i.$$

Da \mathbf{A} eine symmetrische Matrix ist ($A_{ik} = A_{ki}$) kann man die beiden Summen zu einer zusammenfassen:

$$\frac{\partial I_1(\mathbf{c})}{\partial c_k} = \sum_k A_{ki} c_i, \quad \text{vektorielle Schreibweise} \quad \nabla I_1 = \mathbf{A}\mathbf{c}.$$

Genauso verfährt man mit dem zweiten Term:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2(\mathbf{c})}{\partial c_k} &= \sum_i a_i \frac{\partial c_i}{\partial c_k} \\ &= \sum_i a_i \delta_{ik} \\ &= a_k, \end{aligned}$$

in vektorieller Schreibweise also

$$\nabla I_2 = \mathbf{a}.$$

Die Extremwertbedingung $\nabla I = \mathbf{0}$ lautet somit im vorliegenden Fall

$$\mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

oder

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = -\mathbf{a}.$$

Berechnung der Matrixelemente

$$\begin{aligned} (H_{i-1}, H_{i-1})_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_{i-1} H_{i-1} dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x_i - x}{h} \right)^2 dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x_{i-1} + h - x}{h} \right)^2 dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(- \left(\frac{x - x_{i-1} - h}{h} \right) \right)^2 dx \\ &= h \int_0^1 (\xi - 1)^2 d\xi \\ &= \frac{h}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (H_{i-1}, H_i)_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_{i-1} H_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x_i - x}{h} \right) \left(\frac{x_{i-1} - x}{h} \right) dx \\ &= \frac{h}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(H_i, H_i)_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_i H_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h} \right)^2 dx \\ &= \frac{h}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(H'_{i-1}, H'_{i-1})_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} H'_{i-1} H'_{i-1} dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(-\frac{1}{h} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{h},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(H'_{i-1}, H'_i)_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} H'_{i-1} H'_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(-\frac{1}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) dx \\ &= -\frac{1}{h},\end{aligned}$$

$$(H'_i, H'_{i-1})_i = \frac{1}{h},$$

$$\begin{aligned}(H'_i, H'_i)_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} H'_i H'_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{h}.\end{aligned}$$

Herleitung der Eulerschen Gleichung

Die Ableitung von I nach ε berechnet man folgendermaßen:

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \frac{\partial F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')}{\partial \varepsilon} dx \quad (39)$$

wobei \tilde{y} durch Formel 16 gegeben ist und

$$\tilde{y}' = \frac{d\tilde{f}(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \varepsilon \frac{d\eta(x)}{dx}.$$

Die Berechnung der in Gleichung 39 auftretenden partiellen Ableitung erfolgt mittels Kettenregel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \varepsilon} \\ &= \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \frac{d\eta}{dx}.\end{aligned}$$

Gleichung 39 lautet daher

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \frac{d\eta}{dx} \right] dx$$

und hieraus ergibt sich mittels partieller Integration

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \eta \Big|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \right) \eta \right] dx. \quad (40)$$

Literatur

- [1] M. D. Greenberg: *Foundations of Applied Mathematics*, Prentice Hall Inc. 1978
- [2] M. Jung u. U. Langer: *Methode der finiten Elemente für Ingenieure*, 1. Auflage, Teubner 2001
- [3] G. Müller u. C. Groth: *FEM für Praktiker*, 4. Auflage, expert-Verlag 1999
- [4] H. R. Schwarz: *Methode der finiten Elemente*, 3. Auflage, Teubner 1991